# Probabilité en terminale scientifique S

## Formulaire de probabilité

## Dénombrements – Probabilités

**Cardinal :** Le cardinal d'un ensemble E, noté card (E), est le nombre d'éléments de cet ensemble

si $A \cap B \neq \varnothing$ $\quad \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

si $A \cap B = \varnothing$ $\quad \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

**Permutation**

Le nombre de permutations d'un ensemble E avec card( E) = n est :

**n !** (factorielle n)

**Combinaison**

**(Tirage simultané, l'ordre n'intervient pas)**

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

**Probabilité simple**

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

**Probabilité conditionnelle**

probabilité de A sachant B

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Espérance**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

**Variance**

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

**Ecart type**

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$$

**Exercice 1**
Dans un colonie de 100 poussins, 2 d'entre eux font 50 kg.

Quelle est la probabilité d'avoir au moins un des deux poussins géants si l'on prend 12 poussins ?

**Exercice 2**
Un sac contient n boules parmi lesquelles 5 blanches et (n-5) noires.
On tire successivement deux boules du sac, sans remettre la première avant de tirer la seconde, de sorte que les couples de boules distinctes tirés soient équiprobables.

Quelle est en fonction de n, la probabilité p de l'événement :
« La première boule tirée est blanche et la deuxième est noire. »

**Exercice 3**
Quatre mousquetaires Atos, Portos, Aramis et Claviersansdos veulent aller indépendamment le même jour, à la même heure au cinématographos. Il y a quatre cinématographos dans la même ville de Biscaros.

1. Calculer la probabilité pour que Atos, Portos, Aramis et Claviersansdos soient dans quatre salles différentes.

2. Calculer la probabilité pour que Atos et Aramis se trouvent dans la même salle.

**Exercice 4**
Dans une urne, on a disposé trois jetons indiscernables au toucher :
un rouge,
un noir,
un blanc.
Le tirage du jeton rouge rapporte deux francs.
Celui du jeton noir fait perdre un franc.
Le tirage du jeton blanc arrête la partie.
Après chaque tirage, le jeton tiré est remis dans l'urne dont le contenu est mélangé.

Une partie comporte trois tirages au maximum :

1. Quelle est la probabilité pour que la partie s'arrête avant le 3ème tirage ?

2. Soit X la variable aléatoire qui associe à toute partie le gain du joueur.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

## Exercice 5

La population des postulants au baccalauréat est formée de 42 % de garçons et de 58 % de filles.

Parmi les garçons, 15 % appartiennent au club des testeurs de cédéroms « Les Sphères du Bac ».

Parmi les filles 6 % appartiennent à ce même club.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un élève du lycée soit un testeur ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'un élève appartenant au club soit un garçon ?

## Exercice 6

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher.

5 boules sont numérotées « 1 », les 5 autres sont numérotées « 2 ».

On tire simultanément 5 boules. On appelle X le total des points obtenus.

1. Etudier la loi de probabilité de la variable aléatoire X
2. Etudier la fonction de répartition de X

## Exercice 7

Dans un jeu de 32 cartes, on en tire 8 au hasard.

Quelle est la probabilité pour que parmi ces 8 cartes figurent :

1. 2 as et 3 piques dont l'as de pique

2. 2 as et 3 piques sans l'as de pique

3. 2 as et 3 piques

## Exercice 8

Quinze ordinateurs 233 MMX sont proposés dans une vente aux enchères. Parmi ces 15 ordinateurs, 6 sont en panne.

Un inconscient achète 3 ordinateurs pris « au hasard ».

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'ordinateurs achetés en état de marche.

1. Déterminer la loi de probabilité de X

2. Calculer l'espérance mathématique

**Exercice 9**
Un échiquier rectangulaire contient 10 colonnes et p lignes.

De combien de façon peut-on placer 10 objets identiques dans 10 cases de cet échiquier de façon qu'il n'y ait pas deux objets dans une même colonne ?

**Exercice 10**

Au cours d'une enquête sur un échantillon d'une population,
on distingue G l'événement suivant « la personne interrogée a contracté la grippe au cours de l'année»
et B « elle a contracté au cours de la même période une maladie bénigne »
on obtient les résultats suivants :

$p(G) = 0,4$ et $p(B/G) = 0,3$ et $p(G/B) = \frac{4}{9}$

On suppose que B et G n'influent pas entre eux.
Quelles sont les probabilités pour qu'une personne choisie au hasard ait contracté

1. la grippe et une maladie bénigne

2. l'une à l'exclusion de l'autre

3. ni l'une, ni l'autre

**Exercice 11**

Une question est posée. Il y a 5 réponses possibles dont une seule est juste : on suppose que le candidat ne connaît pas la réponse, et que chacune a la même probabilité de sortir.
On suppose que la probabilité qu'a le candidat de connaître la réponse est de 0,4.

1. Quelle est la probabilité qu'il a de donner une réponse correcte ?

2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la réponse sachant qu'il a répondu correctement ?

## Exercice 12

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher. $U_1$ contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). $U_2$ contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de $U_1$ et on la met dans $U_2$, puis on tire au hasard une boule de $U_2$ et on la met dans $U_1$ ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'événement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

   a) Montrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrire :

   $$p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

   b) Déterminer la limite de p(A) lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne $U_2$ contient une seule boule blanche ».

   Vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrire

   $$p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$$

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans $U_2$.

   – Si $U_2$ contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs ;

   – Si $U_2$ contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;

   – Si $U_2$ contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

   a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère n > 10 et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne $U_2$ contient une seule boule blanche, X = 2n – 20).

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne $U_1$ contient au moins 25 boules blanches.

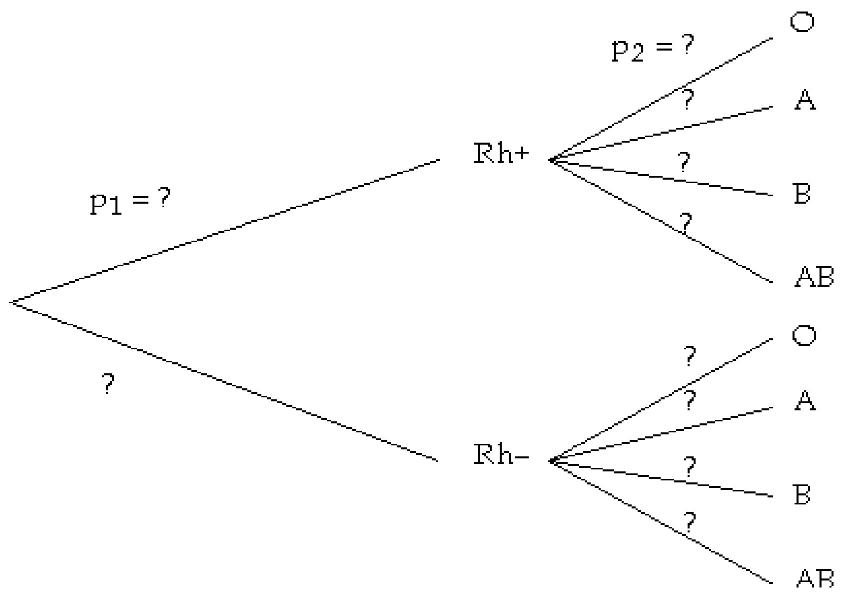
## Exercice 13

Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des habitants de la France :

| | O | A | B | AB |
|---|---|---|---|---|
| Rhésus + | 35,0% | 38,1% | 6,2% | 2,8% |
| Rhésus - | 9,0% | 7,2% | 1,2% | 0,5% |

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à 3 décimales.

**1.** L'objectif de cette question est de compléter à l'aide des données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.




L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).
On note Rh+ l'événement "la personne a le facteur Rh+".
On note O l'événement "la personne appartient au groupe O".

a) Déterminer la probabilité $p_1$, c'est à dire $p(Rh+)$.

On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbre.
Déterminer de même la probabilité $p_2$ (en détaillant les calculs).

b) Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs).

**2.** a) Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ? Vérifier ce résultat à partir du tableau.

b) Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

**3.** a) On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).
Calculer, en fonction de n, la probabilité p pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p \geqslant 0{,}999$.

## Exercice 14

**1.** Une urne $U_1$ contient 2 jetons numérotés 1 et 2.

Une urne $U_2$ contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne (Les choix sont supposés équiprobables).

a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?

b) On a tiré un jeton portant le numéro 1.
Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne $U_1$ ?

**2.** On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

b) Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.
Déterminer la loi de probabilité de S.

c) Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 Euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit $\lambda$ Euros de Dominique.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de $\lambda$, puis déterminer $\lambda$ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que E(X) soit égale à 0).

## Exercice 15

Un urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :
A : "On obtient des boules des deux couleurs"
B : "On obtient au plus une boule blanche".

**1.** a) Calculer la probabilité de l'événement : "Toutes les boules tirées sont de la même couleur".
b) Calculer la probabilité de l'événement : "On obtient exactement une boule blanche".
c) En déduire que les probabilités $p(A\cap B)$, $p(A)$ et $p(B)$ sont:

$$p(A\cap B) = \frac{n}{2^n}, \qquad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

**2.** Montrer que $p(A\cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si $2^{n-1} = n + 1$.

**3.** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 par :

$$u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$$

Calculer $u_2$, $u_3$ et $u_4$.
Démontrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

**4.** En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

**Exercice 16**

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, P(A) désigne la probabilité de A ; p(B/ A) la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

$p_i = P(X = i)$

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,5 | 0,4 |

a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :

$C_1$ : « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
$C_2$ : « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».

a) Calculer $P(C_1 \cap E)$.
b) Montrer que $P(E/ C_2) = 0{,}42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

**Exercice 17**

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires.

On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle est noire, on place dans l'urne B,
- sinon, on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.

On considère les événements suivants :

$R_1$ : « la boule tirée de A est rouge »

$R_2$ : « la boule tirée de B est rouge »

$N_1$ : « la boule tirée de A est noire »

$N_2$ : « la boule tirée de B est noire »

**1.** a) Calculer les probabilités des événements $R_1$ et $N_1$.

b) Calculer les probabilités des événements « $R_2$ sachant $R_1$ » et « $R_2$ sachant $N_1$ ». En déduire que la probabilité de $R_2$ est de $\dfrac{27}{50}$.

c) Calculer la probabilité de $N_2$.

**2.** On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.

Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

**Exercice 18**

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.
On effectue n tirages successifs (n entier supérieur ou égal à 1) d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est blanche, on ne la remet pas.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

**Partie A**

Dans cette partie n = 3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note $E_k$ l'événement « seule la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche ». Par exemple, $E_1$ est l'événement « seule la première boule tirée est blanche ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement $E_1$ est $p(E_1) = \dfrac{5}{36}$.
2. Calculer les probabilités des événements $E_2$ et $E_3$.
   En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages.
3. Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier.

**Partie B**

On effectue maintenant n tirages.

1. Déterminer, en fonction de n, la probabilité $p_n$ de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2. Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $p_n > 0{,}99$ ?

**Exercice 19**

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge. Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1. Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents.
   Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.

2. On tire simultanément trois dominos du sac.
   Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux doubles parmi ces trois dominos ?

3. Dans cette question, on tire un seul domino. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) $J_2$ : « le jaune figure deux fois »,
   b) $J_1$ : « le jaune figure une seule fois »,
   c) $J$ : « le jaune figure au moins une fois ».

4. On effectue n tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la ou les couleurs obtenues avant de remettre dans le sac le domino tiré et de procéder au tirage suivant, les tirages sont indépendants.
   Calculer, en fonction de n, la probabilité $p_n$ que J soit réalisé au moins une fois.
   Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

**Exercice20**

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
   a) On suppose ici n = 10. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les choisis.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.
   Calculer la probabilité, notée $p_n$, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.
   a) On suppose ici n = 10. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.
   Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.
   Calculer la probabilité, notée $q_n$, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
3. a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a : $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.

   b) En remarquant que pour tout entier n, n–2 est inférieur à n–1, déterminer un entier naturel $n_0$ tel que pour tout n supérieur ou égal à $n_0$, on ait $p_n - q_n < 10^{-3}$.
   c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

## Exercice 21

1. On dispose d'une urne $U_1$ contenant trois boules rouges et sept boules noires.
   On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.
   a) Quelle est la probabilité $p_1$ que les deux boules tirées soient rouges ?
   b) Quelle est la probabilité $p_2$ que les deux boules tirées soient noires ?
   c) Quelle est la probabilité $p_3$ que les deux boules tirées soient de même couleur ?
   d) Quelle est la probabilité $p_4$ que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne $U_2$ contenant quatre boules rouges et six boules noires.
   On tire maintenant deux boules de l'urne $U_1$ et une boule de l'urne $U_2$ ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
   On considère les événements suivants :
   R : « les trois boules tirées sont rouges »
   D : « les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »
   B : « la boule tirée dans l'urne $U_2$ est rouge ».
   a) Calculer la probabilité de l'événement R.
   b) Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
   c) Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$ de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

## Exercice22

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.
On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.
On note A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux » ;
On note B l'événement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

1. a) Définir l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$.
   b) Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$.

2. a) Calculer p(B/ A), probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p(B \cap A)$.
   b) Calculer p(B).

3. Calculer p(A/ B), probabilité de A sachant que B est réalisé.

## Exercice 23

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

**1.** On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.
b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

**2.** On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question **1.**

**3.** n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle $P_n$ la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.
a) Calculer $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_n$.
b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n$. $(n > 1)$.
Exprimer $S_n$ en fonction de n et déterminer la limite de $S_n$.

## Exercice24

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher. $U_1$ contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). $U_2$ contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de $U_1$ et on la met dans $U_2$, puis on tire au hasard une boule de $U_2$ et on la met dans $U_1$ ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

**1.** On considère l'événement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
a) Montrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrire :

$$p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

b) Déterminer la limite de p(A) lorsque n tend vers $+\infty$.

**2.** On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne $U_2$ contient une seule boule blanche ».
Vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrire

$$p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$$

**3.** Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans $U_2$.
– Si $U_2$ contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs ;
– Si $U_2$ contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
– Si $U_2$ contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.
a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire $X$ qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne $U_2$ contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

b) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

c) Calculer l'espérance mathématique de $X$.

d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne $U_1$ contient au moins 25 boules blanches.

Exercice 25

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.

Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur.

Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.

Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.

On note $P(E)$ la probabilité d'un événement $E$ et $P(E/F)$ la probabilité conditionnelle de $E$ sachant $F$.

Un client téléphone à l'artisan.

On note : R l'événement « le client obtient le répondeur »

A l'événement « l'artisan est présent »

$\overline{A}$ l'événement contraire de A.

1. Déterminer la probabilité $P(R)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P(R/A)$ et $P(R/\overline{A})$.

2. a) En déduire l'égalité $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1$

   b) Calculer la probabilité que l'artisan soit présent.

3. Un client téléphone ; il obtient le répondeur.

   Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

Exercice 26

Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport.

**N.B. :** Si E est un événement, on notera P(E) sa probabilité et $\overline{E}$ l'événement contraire. Si E et F sont deux événements, P(E/F) est la probabilité de « E sachant que F est réalisé ».

Les résultats demandés seront donnés sous forme décimale à $10^{-3}$ près.

**1.** On demande à trois inscrits choisis au hasard de remplir un questionnaire. Calculer les probabilités des événements suivants :
a) A : « les sportifs choisis pratiquent tous l'athlétisme » ;
b) B : « les sportifs choisis pratiquent tous le même sport ».

**2.** Parmi les inscrits en natation 45 % sont des filles. De même 20 % des inscrits en athlétisme et 68 % des inscrits en gymnastique sont des filles.
a) On choisit un inscrit au hasard.
Quelle est la probabilité $p_1$ que l'inscrit choisi soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
Quelle est la probabilité $p_2$ que ce soit une fille ?
b) Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité $p_3$ qu'elle pratique l'athlétisme ?

## Exercice 27

On dispose de deux urnes :

- une urne $U_1$ dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;
- une urne $U_2$ dans laquelle il y a deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1. Montrer que la probabilité de l'événement E : « Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches » est égale à 0,46.

2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Le joueur doit verser 2,50 F avant d'effectuer le tirage : il reçoit à l'issu du tirage 1 F par boule blanche obtenue. Le jeu est–il équitable ?

3. Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne $U_1$ sachant qu'on a tiré deux boules blanches.

4. On ne considère que l'urne $U_1$, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches. On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

## Exercice28

Un fabriquant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10 %, 40 % et 50 % de la production totale de son usine.
Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5 % pour la machine A, de 1,5 % pour la machine B et de 2,2 % pour la machine C.
Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines.
On choisit au hasard un berlingot dans le bac.

1. Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est 0,011.

2. Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.

3. Calculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.

4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

## Exercice 29

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On imagine n sacs de jetons $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$.

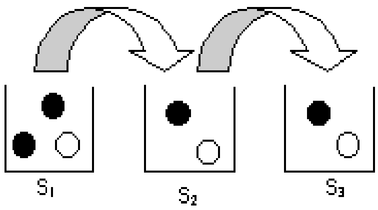
Au départ, le sac $S_1$ contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

– Première étape : on tire au hasard un jeton de $S_1$.

– Deuxième étape : on place ce jeton dans $S_2$, et on tire, au hasard, un jeton de $S_2$.

– Troisième étape : après avoir placé dans $S_3$ le jeton sorti de $S_2$, on tire, au hasard, un jeton de $S_3$ ...et ainsi de suite...




Pour tout entier naturel k tel que $1 \le k \le n$, on note $E_k$ l'événement : « le jeton sorti de $S_k$ est blanc », et $\overline{E_k}$ l'événement contraire.

**1.** a) Déterminer la probabilité de $E_1$, notée $P(E_1)$, et les probabilités conditionnelles : $P(E_2 / E_1)$ et $P(E_2 / \overline{E_1})$.

En déduire la probabilité de $E_2$, notée $P(E_2)$.

b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \le k \le n$, la probabilité de $E_k$ est notée $p_k$.

Justifier la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

**2.** Etude d'une suite $(u_n)$

On note $(u_k)$ la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier naturel $k \ge 1$,

$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.

a) On considère la suite $(v_k)$ définie par : pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$,

$v_k = u_k - \frac{1}{2}$.

Démontrer que $(v_k)$ est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de $u_k$ en fonction de k. Montrer que la suite $(u_k)$ est convergente et préciser sa limite.

**3.** Dans cette question, on suppose que n = 10. Déterminer pour quelles valeurs de k on a :

$$0,4999 < p_k < 0,5.$$

## Exercice 30

**I.** Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

**1.** Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?

**2.** Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?

**3.** Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?

**4.** Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

**II.** On considère maintenant que l'élève a étudié $n$ des 100 leçons. ($n$ étant un entier inférieur ou égal à 100).

**1.** Quelle est la probabilité $p_n$ qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

**2.** Déterminer les entiers $n$ tels que $p_n$ soit supérieur ou égal à 0,95.