BARYCENTRE (1)

EXERCICE 1 :

ABCD est un parallélogramme de centre O .
1°) Définir vectoriellement et placer les points I, J, et K définis par : I est le barycentre de (A, 5) et (B , -2) ; J le barycentre de (B, 1) et (C , -2) ; K le barycentre de (C, -5) et (D , 2). L est le barycentre de (D, -1) et (A , 2) .
2°) Démontrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.

EXERCICE 2 :

Soient A et B deux points tels que AB = 10 cm .
1°) Construire le barycentre C de (A, 2) et (B , 3) et le barycentre D de (A, 3) et (B , 2) .
2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

EXERCICE 3 :

Soit ABC un triangle, A' le barycentre des points pondérés (B, -1) et (C , 2) ; B' le barycentre de (A, 3) et (C , 2) ; C ' le barycentre de (A, 3) et (B , -1) .
1°) Placer A', B' et C '.
2°) Soit G le barycentre de (A, 3) (B , -1) et (C , 2) . Montrer que : $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$
En déduire que G est un point de (AA') .
3°) Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC ') sont concourantes

EXERCICE 4 :

Soit ABC un triangle. Soient I et J les points définis par : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
Les droites (BJ) et (CI) se coupent en G . La droite (AG) coupe (BC) en K .
1°) Faire une figure.
2°) Trouver les réels a, b et c tels que I soit le barycentre de {(A, a) (B , b) } et J le barycentre du système { (A, a) (C , c) } .
3°) Montrer que le barycentre du système { (A, a) ; (B , b) ; (C , c) } est le point G .
En déduire que K est le barycentre de (B , b) et (C , c) et donner la position de K sur la droite (BC) .

EXERCICE 5 :

Soit ABC un triangle quelconque.
1°) Construire :
- le barycentre G de (A , 3) et (B, 3)
- le barycentre E de (B , 3) et (C, 3)
- le barycentre F de (A , 3) et (C, 1)

2°) Soit I le barycentre de (A, 3) , (B , 3) et (C , 1) . Démontrer que :
a) les points A, I et E sont alignés .
b) les points B, I et F sont alignés , ainsi que C, I et G .
c) Que peut-on en déduire pour les droites (AE) , (BF) et (CG) ?

3°) Construire le barycentre E ' des points (B , 3) et (C, -1) .
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EG'}$ *et* $\overrightarrow{GF}$ et en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ .En déduire que E ' , F et G sont alignés .
4°) Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
Soit H le symétrique de A par rapport à B et K le point d'intersection des droites (E' H) et (EF) .
Montrer que $\overrightarrow{E'K}=\frac{3}{2}\overrightarrow{E'H}$

<u>EXERCICE 6 :</u>

Soit ABC un triangle et k un réel non nul .Soient D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CE} = k\,\overrightarrow{CA}$

1°) Montrer que D est le barycentre de (A, 1 − k) et (B, k) et E le barycentre de (C, 1 − k) et (A, k)
.

3°) En déduire que, pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{MB'} + k\overrightarrow{B'C'})$ où B' et C' sont les milieux respectifs de [AC] et [AB]

4°) Montrer que [DE], [AC] et [AB] ont leurs milieux alignés

<u>EXERCICE 7 :</u>

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a = 4 cm .

Soit D le point défini par : $3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

1°) Exprimer D comme barycentre de A, B, et C affectés de coefficients à préciser.

2°) Soit I le milieu de [AC] .Montrer que D est barycentre de B et I affectés de coefficients à préciser.
En déduire que D est le symétrique de G par rapport à I (G étant le centre de gravité du triangle ABC) .

3°) Soit **(E)** l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{3}$

a) Déterminer l'ensemble **(E)**.
b) Vérifier que G appartient à **(E)** et construire **(E)**.

<u>EXERCICE 8 :</u>

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 6 .

1°) Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2°) Démontrer que G est le barycentre de A, B et C affectés de coefficients que l'on précisera

3°) Déterminer et représenter l'ensemble **C** des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 10$

4°) Montrer que **(C)** passe par les points C et A .

<u>EXERCICE 9:</u>

Soient A, B, C trois points distincts ; a, b, c des réels tels que a + b + c $\neq$ 0 .
Soit G le barycentre des points pondérés (A, a) , (B , b) et (C , c) .
1°) Démontrer que les points pondérés (A, 2a + 1) , (B , 2b − 2) et (C , 2c + 1) admettent un barycentre qu'on appellera K .
2°) a) Donner une relation vectorielle définissant K et en déduire que :

$$a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} + c\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$$

b) En déduire que G et K sont confondus si et seulement si B est le milieu du segment [AC] .

3°) On suppose que A, B et C ne sont pas alignés . Soit E le point vérifiant que ABCE est un parallélogramme.

a) Démontrer que $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2(a+b+c)}\overrightarrow{BE}$ (utiliser la question 2°)
b) On pose a = c = 1/2 et b = 2 . Construire les points G et K .