I. Soit O, A, B et C quatre points non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$. On désigne par $\mathcal{R}$ le repère cartésien $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$, et on rapporte $\mathcal{E}$ à ce repère.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). Déterminer une équation cartésienne du plan π parallèle à (ABC) et passant par O.
2) Soit k un réel. Caractériser géométriquement l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) vérifient : $x+y+z=k$.
3) Soit $\vec{V}$ un vecteur non nul, de coordonnées (a, b, c) dans la base $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$.

a) Décrire l'ensemble Δ des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées sont de la forme $(1+\alpha a,\alpha b,\alpha c)$, où α est un réel quelconque.

b) Montrer que Δ est inclus dans le plan (ABC) si et seulement si l'on a : $a+b+c=0$

II. On désigne par $\mathcal{E}'$ l'ensemble $\mathcal{E}\backslash\pi$.

1) Soit M un point de l'ensemble $\mathcal{E}'$, de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$. On lui associe le barycentre M' du système $\{(O,x),(A,y),(B,z)\}$. Montrer que l'on définit ainsi une application de f de l'ensemble $\mathcal{E}'$ dans le plan (OAB).
2) .

a) On désigne par G l'isobarycentre de $\{O,A,B\}$ Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}'$ tels que :f(M) = G.

b) Soit N un point du plan (OAB). Montrer qu'il existe un unique point M_1 appartenant au plan (ABC) et tel que :
$f(M_1) = N$. Montrer que l'ensemble des antécédents de N est la droite (OM_1) privée du point O. Déterminer $f(\mathcal{E}')$.

c) Soit π' un plan strictement parallèle à π. Montrer que l'application f détermine une bijection de **π'** sur le plan (OAB).

3) ..

a) On désigne par K le milieu de $[AB]$ et par L la droite $(K,\overrightarrow{OC})$. Déterminer l'ensemble $f(L\cap \mathcal{E}')$. cet ensemble est-t-il une droite ?

b) Soit D une droite incluse dans le plan (ABC). Montrer que f(D) est une droite.

III. On se propose de déterminer géométriquement l'image M' d'un point M par f.

1) Soit P un point de la droite (AB). Montrer que P' appartient à la droite (OA). Donner une construction géométrique du point P'. Faire une figure dans le plan (OAB).
2) Soit Q un point de la droite (BC). Montrer que Q' appartient à la droite (AB). Donner une construction géométrique du point Q'. Faire une figure dans le plan (ABC).
3) Soit M_1 un point du plan (ABC). Donner une construction du point M_1'. Donner ensuite une construction de l'image M' d'un point M quelconque de $\mathcal{E}'$.