MINISTERE DE L'EDUCATION
INSPECTION D'ACADEMIE DE ZIGUINCHOR
LYCEE EL HADJI OMAR LAMINE BADJI
☎ : 339916624

Année scolaire 07/08
TS1
M. FALL
Email :mf2@yahoo.fr

Exercice 1

ABC est un triangle, on pose BC = a, AC = b, et AB = c ; A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] ; G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

2) En calculant de deux façons différentes : $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2$, établir que
$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2)$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA'] et [BC] montrer que lorsqu' ils existent ; ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

Exercice 2

ABC est un triangle et on désigne par G son centre de gravite. Soit φ *et* f les applications définies par :

$\varphi : P \to IR$
$M \mapsto \varphi(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$f : P \to IR$
$M \mapsto f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a :
$$\varphi(M) = 3MG^2 + \varphi(G) \quad \text{et} \quad \varphi(G) = -\frac{1}{2}f(G)$$
2) Calculer $f(G)$ en fonction de AB, AC et BC et en déduire l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG, AB, AC et BC.
3) Dans le cas particulier ou le triangle est équilatéral de coté a, déterminer l'ensemble des points M tels que : $\frac{a^2}{4} \le \varphi(M) \le \frac{a^2}{2}$.

Exercice 3 On considère dans un plan P un triangle équilatéral ABC de cote a (a$\in IR^*_+$)

1. Construire le barycentre D du système $\{(A;2),(B;-2),(C;-1)\}$.
2. a. Déterminer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de a.
   b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B.
3. Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a.
4. Pour tout point M du plan on pose f(M) = 2MA ^{2} - 2MB ^{2} - MC ^{2} et on désigne par (F) L'ensemble des points M du plan tels que f(M) = 0.
   a. Vérifier que C appartient à (F).
   b. Exprimer f(M) en fonction de MD et de a.   c. Déterminer et construire (F).
5. Pour tout point M du plan, on pose g(M) = 2 $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DB} + a^2$.
   a. Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que g(M) = a^2.
   b. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (G).
   Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

Exercice 4 On donne un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G et A' le milieu de $[BC]$ .On pose BC = a.

a) Exprimer $4\overrightarrow{GA} . \overrightarrow{AA'}$ en fonction de a.

b) Exprimer $GB^2 + GC^2$ en fonction de a.

c) En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{3}a^2$

d) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3}{4}a^2$

__**Exercice 5**__

ABC est un triangle dont les angles sont aigus. A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A sur$[BC], [AC]$ *et* $[AB]$.

1) Montrer que

Année scolaire 07/08
TS1
M. FALL
Email :mf2@yahoo.fr

a) A' est Barycentre de $\left\{ \left(B, \tan \hat{B}\right); \left(C, \tan \hat{C}\right) \right\}$

b) B' est Barycentre de $\left\{ \left(A, \tan \hat{A}\right); \left(C, \tan \hat{C}\right) \right\}$

c) C' est Barycentre de $\left\{ \left(B, \tan \hat{B}\right); \left(A, \tan \hat{A}\right) \right\}$

2) Soit H l'orthocentre du triangle ABC et le vecteur $\vec{V}$ défini par

$$\vec{V} = \tan \hat{A} \,.\, \overrightarrow{HA} + \tan \hat{B} \,.\, \overrightarrow{HB} + \tan \hat{C} \,.\, \overrightarrow{HC}$$

a) Montrer que $\vec{V} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\vec{V} \perp \overrightarrow{AB}$.

b) Que peut-on déduire du point H ?

Exercice 6

Soit ABC un triangle.

1) Démontrer que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \pi[2\pi]$.

2) On suppose que ABC est isocèle en A ; déterminer $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 7: Soit ABC un triangle rectangle en A, O le milieu de [BC] et E celui de [AB].
On pose $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \alpha[2\pi]$.

1) Montrer que $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = \alpha[2\pi]$.

2) En déduire que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 2\alpha[2\pi]$.

Exercice 8: A et B sont deux points du plan ; Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

1) $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

4) $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

5) $\left|\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right)\right| = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

6) $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = 0\,[2\pi]$

7) $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \pi\,[2\pi]$

Exercice 9 :Soit (δ) et (ζ) deux cercles sécants en deux points A et B . On choisit un point C sur (δ) et un point D sur (ζ), ces points étant distincts de A et B .Un point P décrit le cercle (δ) .La droite (PA) coupe le cercle (ζ) en un point Q ; lorsque P est en A ,on considère que la droite (PA) est la tangente en A à (δ)

1**.** Montrer que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{QD})(\pi)$ .En déduire que (PC) et (QD) sont sécantes en un point R si et seulement si C, B et D ne sont pas alignés.

2. On suppose B, C et D non alignés. Montrer que $(\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})(\pi)$

En déduire l'ensemble décrit par R quand P décrit (δ).

Exercice 10 ABC est un triangle ;H le projeté orthogonal de A sur (BC) ; P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur les droites (AB) et (AC).

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{HQ}\,; \overrightarrow{HA}\right) = \left(\overrightarrow{CQ}\,; \overrightarrow{CB}\right)[\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{HA}; \overrightarrow{HQ}\right) = \left(\overrightarrow{PA}\,; \overrightarrow{PQ}\right)[\pi]$

2) Déduisez en que les points B ;P ;C ;Q sont cocycliques .

Exercice 11 ABC est un triangle tel que B et C soient fixes et A variable dans le plan vérifiant : $\left(\overrightarrow{BC}\,; \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3}[\pi]$

1) Quel est l'ensemble des points A ?

2) Soit B' le symétrique de B par rapport à (AC) et C' le symétrique de C par rapport à (AB). Démontrer que : (BB') et (CC') sont sécantes.

3) On note D le point d'intersection de (BB') et (CC'). A quelle figure le point D appartient –il ?

Exercice 12 Soit ABC un triangle, F le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Pour tout point M la droite passant par M et orthogonal à (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q.

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{FP}\,; \overrightarrow{FQ}\right) + \left(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)[\pi]$

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que : F, P et Q soient alignés.

3) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\left(\overrightarrow{FP}; \overrightarrow{FQ}\right) = \alpha[\pi]$

Année scolaire 07/08
TS1
M. FALL
Email :mf2@yahoo.fr

Exercice 13. ABC est un triangle et M un point qui se projette orthogonalement sur (BC), (CA) et (AB) respectivement en P, Q et R.

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MR}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{QR}\right)\,[\pi]$.
2) Montrer que : (MB, MR) = (CB, PR) [π]. $\left(\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MR}\right)=\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{PR}\right)\,[\pi]$.
3) En déduire que : $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{PR}\,;\overrightarrow{QR}\right)\,[\pi]$.
4) Démontrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. (La droite contenant les points P, Q et R est une droite de ***Simson*** de M relativement à ABC).

Isométries du plan et Applications affines

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ on appelle O le centre de gravité du triangle. Les points I ; J ; K sont tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CA}$

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que I soit barycentre de (A ;a) et (B ;b).
2) En utilisant la rotation de centre O qui transforme A en B ; démontrer que O est le centre de gravité du triangle IJK.

Exercice 2

ABCD est un carré de centre de O tel que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ .Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de rot.

Exercice 3

Dans le plan orienté ; on considère un triangle équilatéral ABC tel que une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.On appelle (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de [BC] coupe (Γ) en A et D, on appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
2) On désigne par $S_{(BD)} \circ S_{(CD)}$; $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$ les symétries orthogonales par rapport à (BD) ; (CD) ; (CA) ; (AB) respectivement.
3) Quelle est la nature des applications suivantes : $S_{(BD)} \circ S_{(CD)}$; $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$? on précisera les éléments caractéristiques.
4) Soit (Δ) la droite parallèle à (DC) menée par A et $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale par rapport à (Δ). Démontrer que : $S_{(BD)} \circ S_{(CD)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ et $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$
5) Retrouver les résultats du1) en utilisant l'application t définie par : t = $S_{(BD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$ que l'on caractérisera.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.on appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;on note I le milieu de [BC]

1) Construire le point J = R(I).
2) On pose F_1= RoT et F_2 = TOR
   Déterminer F_1(J) et F_2(I) puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de F_1 et F_2.
3) Soit M un point du plan $M_1 = F_1(M)$ et $M_2 = F_2(M)$;Quelle est la nature du triangle BCM_1M_2 ?

Exercice 5

Soit Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o;i;j\right)$ et A (2 ;0) , B(2 ;2) , C(0 ;D)

S_1 et S_2 sont les orthogonales par rapport à (AC) et (OA) et la translation de vecteur OC
Reconnaître S_1oS_2 ; puis ToS_2oS_1

Exercice 6

Soit Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o;i;j\right)$ et I (0 ;1) , J(1 ;0)

R_I et R_J sont les rotations de centre respectifs I et J d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur IJ

Reconnaître S = R_I oToR_J

MINISTERE DE L'EDUCATION
INSPECTION D'ACADEMIE DE ZIGUINCHOR
LYCEE EL HADJI OMAR LAMINE BADJI
☎ : 339916624

Année scolaire 07/08
TS1
M. FALL
Email :mf2@yahoo.fr

Exercice 7

Soit ABC un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB < AC. On appelle (Ψ) le cercle circonscrit au triangle ABC et le point O son centre. Soit E le milieu de [BC] et P le point [AC] tel que AB = CP. La droite (OE) coupe (Ψ) en I et J tel que J et A soient sur le même AC arc du (Ψ).

1) a) Faire une figure.

   b) Quel est l'ensemble des points M du plan (P) tels que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$?

   c) Quel est l'ensemble des points M de (P) tels que: $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et MB < MC ?

2) a) Justifier qu'il existe une unique rotation R tel que R(A) = P et R(B) = C. Déterminer son centre.

   b) Démontrer que son centre est un point de (Ψ) que l'on précisera

   c) Quelle est la nature du triangle JAP ?

3) Déterminer l'image de B par RoS_B où S_B est la symétrie centrale de centre B. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de RoS_B.

Exercice 8

On considère dans le plan orienté (P) ; deux points A et B. Soit :

R_A la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Pour tout point M du plan (P) ; on pose M'=R_A(M) et M''= R_B(M).

1) De l'étude de $R_B o (R_A)^{-1}$ déduisez en que pour tout point M du plan (P) le milieu du segment [M'M''] est un point fixe J dont on démontrera qu' il appartient au cercle de diamètre [AB] .
2) Le but du problème est de déterminer l'ensemble des M de (P) pour les quels M ; M' ; M'' sont alignés.

a) Pour tout point M distinct de A et B, démontrer que : $\left(\overrightarrow{MM'};\overrightarrow{MM''}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)-\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

b) Déduisez en l'ensemble des points M du plan (P) pour les quels M ; M' ; M'' sont alignés. *Indication* : On pourra calculer dans le triangle BMM'' : $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MM''}\right)+\left(\overrightarrow{M''M};\overrightarrow{M''B}\right)$.

Exercice 9

On considère trois points non alignés A, B et C. Pour tout réel α on définit l'application f_α du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : MM'= 2α MA– α MB– MC.

1) Montrer que f_1 est une translation que l'on précisera.
2) a) On suppose que α ≠ 1. Montrer que f_α admet un unique point invariant G_α et que : CGα= k(AB+ AC), où k est un réel dépendant de α que l'on précisera.

   b) Déterminer l'ensemble des points G_α lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On suppose toujours que α ≠ 1. Exprimer GαM'en fonction de GαM puis en déduire la nature de f_α suivant les valeurs de α. On précisera ses éléments caractéristiques

Exercice 10

Soit A, B, C trois points non alignés du plan et C' le point défini par $CC' = AB$; on désigne par f l'application affine du plan définie par f(A) = A ;f(B) =B et f(C) = C'

1) Montrer que f est une application bijective. Déterminer l'ensemble des points invariant par f. f est – elle une isométrie ? Montrer que les droites parallèles à (AB) sont globalement invariantes par f
2) Le point G est l'isobarycentre de A, B, C ; montrer que G' = f(G) appartient à (BC)
3) M est un point du plan. Donner une construction géométrique de M'= f(M).

Exercice 11

1) O est un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul, soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ h est l'homothétie de centre O et de rapport k. Quelle est la nature de l'application tohot ?
Préciser les éléments servant à la définir

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit M(x, y) et M'(x',y') l' application S définie par

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$$

montrer que S est une symétrie, préciser ses éléments caractéristiques

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ Soit le vecteur $\vec{u}\left(-\frac{3}{2};2\right)$ et f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M associe le point M' telle que : $\overrightarrow{OM'} = \left(\vec{u}.\overrightarrow{OM}\right)\vec{i} + \left(\vec{i}.\overrightarrow{OM}\right)\vec{u}$

1) Donner l'expression analytique de f. En déduire que f est une application affine
2) Déterminer deux points A et B tel que f(A) = A et $\overrightarrow{Of(B)} = -4\overrightarrow{OB}$; en déduire que f est une affinité orthogonale dont on précisera l' axe et le rapport .
3) Exprimer analytiquement f dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ et f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M associe le point M' telle que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$

1) Démontrer que fof =Id
2) Démontrer que l'ensemble des points invariant est une droite (D) que l'on déterminer.
3) Soit M un point du plan et M' son image par f
   a) Démontrer que le milieu de [MM'] appartient à (D)
   b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D)
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.