# Barycentre et Produit Scalaire dans l'espace

## Exercice 1

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH.

Soit I le barycentre des points pondérés(E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B; 2) et enfin K celui de (G; 2) et (C; 1).

*On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de* I, J *et* K. *On note* Δ *cet ensemble.*

1) Faire une figure et placer les points I, J et K.
2) Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK?
   *Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant :*
   $$\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right).$$
3) Donner les coordonnées des points I, J et K.
4) Soit P (2 ; 0 ; 0) et Q (1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure.
   Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5) Soit $M$ un point de coordonnées ($x$ ; $y$ ; $z$).
   **a.** Démontrer que $M$ appartient à Δsi, et seulement si, le triplet ($x$ ; $y$ ; $z$) est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ?
   **b.** Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6) **a.** Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   **b.** Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

## Exercice 2

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 qui sera complété.
L'espace est rapporté au repère orthonormal
$\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

**Partie A.** Un triangle et son centre de gravité.

1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   **a.** Calculer les coordonnées de I.
   **b.** Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G?
3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

**Partie B.** Une droite particulière

Pour tout nombre réel $k$, on définit deux points $M_k$ et $N_k$ , ainsi qu'un plan P$k$ de la façon suivante :

• $M_k$ est le point de la droite (AG) tel que
$\overrightarrow{AM_K} = k\overrightarrow{AG}$

• $P_k$ est le plan passant par $M_k$ et parallèle au plan (BDE);

• $N_k$ est le point d'intersection du plan $P_k$ et de la droite (BC).

1) Identifier $P_{\frac{1}{3}}$ ; $M_{\frac{1}{3}}$ ; $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
2) Calcul des coordonnées de $N_k$.
   **a.** Calculer les coordonnées de $M_k$ dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   **b.** Déterminer une équation du plan P$k$ dans ce repère.
   **c.** En déduire que le point $N_k$ a pour coordonnées (1 ; 3$k$ −1 ; 0).
3) Pour quelles valeurs de $k$ la droite ($M_kN_k$ ) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
4) Pour quelles valeurs de $k$ la distance $M_kN_k$ est-elle minimale ?
5) Tracer sur la figure la section du cube par le plan $P_{\frac{1}{2}}$. Tracer la droite $(M_{\frac{1}{2}} ; N_{\frac{1}{2}})$ sur la même figure.

## Exercice 3

On considère le tétraèdre ABCD; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1) **a.** Soit $G_1$ le barycentre du système de points pondérés {(A, 1) ; (B, 1) ; (C, −1) ; (D, 1)}. Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ . Placer les points I, J et $G_1$.
   **b.** Soit $G_2$ le barycentre du système de points pondérés {($A$, 1) ; ($B$, 1) ; ($D$, 2)}.
   Démontrez que $G_2$ est le milieu du segment [ID]. Placez $G_2$.
   **c.** Démontrez que I$G_1$DJ est un parallélogramme. En déduire la position de $G_2$ par rapport aux points $G_1$ et J.
2) Soit $m$ un réel. On note $G_m$ le barycentre du système de points pondérés {($A$, 1);($B$, 1); ($C$, $m$−2); ($D$, $m$)}.

**a.** Précisez l'ensemble E des valeurs de $m$ pour lesquelles le barycentre $G_m$ existe.

Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel $m$ appartient l'ensemble E.

**b.** Démontrez que $G_m$, appartient au plan (ICD).

**c.** Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

**d.** En déduire l'ensemble F des points $G_m$ lorsque $m$ décrit l'ensemble E.

**<u>Exercice 4</u>**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

**Partie A**

(Cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Soit P le plan d'équation $ax + by + cx + d = 0$.

On considère le point $I$ de coordonnées $(x_1, y_1, z_1)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a, b, c)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de $I$ au plan P est égale à $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1) Soit Δ la droite passant par $I$ et orthogonale au plan P. Déterminer, en fonction de $a$, $b$, $c$, $x_1$, $y_1$ et $z_1$, un système d'équations paramétriques de (Δ).
2) On note $H$ le point d'intersection de (Δ) et P.

   **a.** Justifier qu'il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

   **b.** Déterminer l'expression de $k$ en fonction de $a$, $b$, $c$, $d$, $x_1$, $y_1$ et $z_1$.

   **c.** En déduire que $IH = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

**Partie B**

Le plan Q d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère S de centre le point Ω de coordonnées (1, −1, 3)

1) Déterminer le rayon de la sphère S.
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan Q
3) En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S et du plan Q.

**<u>Exercice 5</u>**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) On considère le plan P passant par B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}(-2;1;5)$ et le plan R d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

   **a.** Démontrer que les plans P et R sont perpendiculaires

   **b.** Démontrer que l'intersection des plans P et R est la droite(Δ) passant par le point C (−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;1)$.

   **c.** Soit le point A (5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan P, puis la distance du point A au plan R.

   **d.** Déterminer la distance du point A à la droite (Δ).
2) **a.** Soit, pour tout nombre réel $t$, le point $Mt$ de coordonnées $(1+2t ; 3-t ; t)$. Déterminer en fonction de $t$ la longueur AM. On note $\phi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction $\phi$ de R dans R.

   **b.** Étudier le sens de variations de la fonction $\phi$ sur R ; préciser son minimum.

   **c.** Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

**<u>Exercice 6</u>**

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle $A_1$ le centre de gravité du triangle BCD.

1) Montrer que la droite $(AA_1)$ est orthogonale au plan (BCD). On pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC}$.
2) En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment [AA1].
3) On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].

   **a.** Montrer que G appartient au segment [AA1] et déterminer la longueur AG.

   **b.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$
4) Soit H le symétrique de A par rapport à G.

   **a.** Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.

   **b.** Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$.

   **c.** En déduire que HC = HD.

*On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est* $V = \dfrac{1}{3}bh$.

**<u>Exercice 7</u>**

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.
Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

**Partie A**

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

**Partie B**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les points $A(3;2;-1), B(-6;1;1), C(4;-3;3)$ et $D(-1;-5;-1)$.

1) **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.
   **b.** Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   **c.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$.
   **d.** Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?
2) On définit les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0), K(0 ; 0 ; 1). Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

**<u>Exercice 8</u>**

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives (1 ; 0 ; 2), (1 ; 1 ; 4) et (−1 ; 1 ; 1).

1) **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   **b.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 4 ; −2). Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2) Soient $P_1$ et $P_2$ les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
   **a.** Montrer que les plans P1 et P2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
   **b.** La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles?
3) Soit *t* un réel positif quelconque. On considère le barycentre *G* des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et *t*.
   **a.** Justifier l'existence du point *G* pour tout réel positif *t*.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.
   **b.** Montrer que l'ensemble des points *G* lorsque *t* décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C. Pour quelle valeur de *t*, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec *G* ?

*Bon courage !*