Série d'exercices : Calcul barycentrique et géométrie dans l'espace

Exercice 1

Démontrer deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont même centre de gravité si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}.$$

Est-ce le cas lorsque les points A', B', C' et D sont les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC?

Exercice 2

1) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de points M du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées, dans un repère de $\mathcal{P}$, vérifient $y\geq x^2$.
$A_1(a_1,b_1)$ *et* $A_1(a_2,b_2)$ étant deux points de $\mathcal{E}$, on considère le barycentre G de ces points affectés des coefficients λ *et* $1-\lambda$, avec $0\leq\lambda\leq 1$. Calculer les coordonnées (X,Y) de G et montrer que $G\in\mathcal{E}$.

2) .

a) Etablir par récurrence sans nouveau calcul que, si A_1, A_2, …, A_n appartiennent à $\mathcal{E}$, leur isobarycentre appartient à $\mathcal{E}$.

b) On considère le cas où les points A_1, A_2,…, A_n d'abscisses a_1, a_2,…, a_n sont sur la courbe d'équation $y=x^2$.
Déduire de a) l'inégalité suivante :

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\leq n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).$$

Exercice 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle équilatéral ABC. On pose :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{CA}\|=a,\ a>0.$$

1) Déterminer le barycentre G du système (A, 2), (B,1), (C, 1).

2) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan qui vérifient :

$$2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=2a^2$$

3) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan qui vérifient :

$$2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\frac{3a^2}{2}$$

Exercice 4

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle rectangle ABC, d'hypoténuse $[BC]$ de longueur 2a. Soit f l'application :

$$M\mapsto\overrightarrow{f(M)}=4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+m\overrightarrow{MC},\ m\in IR$$

1) Déterminer m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ soit un vecteur constant $\vec{v_0}$ et calculer $\vec{v_0}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) On prend $m=-1$. Démontrer que le barycentre G du système (A, 4), (B,-1), (C, -1) est symétrique par rapport à A du milieu I de $[BC]$.

3) Déterminer l'ensemble :

$$C=\{M\in P/4\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2=-4a^2\}.$$

(On remarquera que $A\in C$)

Exercice 5

Soit, dans le plan $\mathcal{P}$, un carré de coté de longueur c. on considère un réel α *et* f_α l'application du plan dans lui-même :

$$f_\alpha : P\to P$$
$$M\mapsto M'$$

, telle que :

$$\overrightarrow{MM'}=\alpha\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\alpha\overrightarrow{MD}.$$

1) Déterminer, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de f_α.

2) Déterminer, puis construire, l'ensemble E_1 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4c^2.$$

3) Déterminer, puis construire, l'ensemble E_2 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$$

4) Déterminer, puis construire, l'ensemble E_2 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=2c^2$$

Exercice 6

ABC est un triangle, on pose BC = a, AC = b, et AB = c ; A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] ; G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

2) En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2$ établir que

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA'] et [BC] montrer que lorsqu' ils existent ; ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

Exercice 7

ABC est un triangle et on désigne par G son centre de gravite. Soit ϕ *et* f les applications définies par :

$$\phi : P\to IR$$
$$M\mapsto\phi(G)=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$
$$f : P\to IR$$
$$M\mapsto f(M)=MA^2+MB^2+MC^2$$

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\phi(M)=3MG^2+\phi(G) \quad \text{et} \quad \phi(G)=-\frac{1}{2}f(G)$$

2) Calculer $f(G)$ en fonction de AB, AC et BC et en déduire l'expression de $\phi(M)$ en fonction de MG, AB, AC et BC.

3) Dans le cas particulier ou le triangle est équilatéral de coté a, déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\frac{a^2}{4} \leq \phi(M) \leq \frac{a^2}{2}.$$

Exercice 8

On considère dans un plan P un triangle équilatéral ABC de cote a (a $\in IR^{¿}{}_{+}$)

1. Construire le barycentre D du système $\{(A;2),(B;-2),(C;-1)\}$.

2. a. Déterminer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de a.

b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B.

3. Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a.

4. Pour tout point M du plan on pose f(M) = 2MA ^{2} - 2MB ^{2} - MC ^{2} et on désigne par (F)

L'ensemble des points M du plan tels que f(M) = 0.

a. Vérifier que C appartient à (F).

b. Exprimer f(M) en fonction de MD et de a. c. Déterminer et construire (F).

5. Pour tout point M du plan, on pose g(M) = 2 $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DB}+a^2$.

a. Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que g(M) = a^2 .

b. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (G).

Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

Exercice 9

On donne un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G et A' le milieu de $[BC]$ .On pose BC = a.

a) Exprimer $4\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AA'}$ en fonction de a.

b) Exprimer GB^2+GC^2 en fonction de a.

c) En déduire que $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{2}{3}a^2$

d) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2+MC^2=\frac{3}{4}a^2$

<u>**Exercice 10**</u>

ABC est un triangle dont les angles sont aigus. A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A sur $[BC],[AC]$ et $[AB]$.

1) Montrer que

a) A' est Barycentre de $\{(B, \tan\{\hat{B}¿);(C, \tan\{\hat{C}¿)\}$

b) B' est Barycentre de $\{(A, \tan\{\hat{A}¿);(C, \tan\{\hat{C}¿)\}$

c) C' est Barycentre de $\{(B, \tan\{\hat{B}¿);(A, \tan\{\hat{A}¿)\}$

2) Soit H l'orthocentre du triangle ABC et le vecteur $\vec{V}$ défini par : $\vec{V}=\tan\{\hat{A}.\overrightarrow{HA}+\tan\{\hat{B}¿.\overrightarrow{HB}+\tan\{\hat{C}¿.\overrightarrow{HC}¿$

a) Montrer que $\vec{V}$ ¿ $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{V}$ ¿ $\overrightarrow{AB}$.

b) Que peut-on déduire du point H ?

Exercice 11:

Soit ABC un triangle rectangle en A, O le milieu de [BC] et E celui de [AB].

On pose $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BB})=\alpha[2\pi]$

1) Montrer que $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})=\alpha[2\pi]$

2) En déduire que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=2\alpha[2\pi]$

Exercice 12:

A et B sont deux points du plan ; Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

1) $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{4}[2\pi]$; 2) $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}[\pi]$;

3) $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})$ = $0[2\pi]$; 4) $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$; 5) $|(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})|=\frac{\pi}{6}[2\pi]$; 6) $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})$ = $\pi[2\pi]$

Exercice 13 :

Soit (δ) et (ζ) deux cercles sécants en deux points A et B . On choisit un point C sur (δ) et un point D sur (ζ), ces points étant distincts de A et B .Un point P décrit le cercle (δ) .La droite (PA) coupe le cercle (ζ) en un point Q ; lorsque P est en A ,on considère que la droite (PA) est la tangente en A à (δ)

1. Montrer que ($\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{QD})(\pi)$ .En déduire que (PC) et (QD) sont sécantes en un point R si et seulement si C, B et D ne sont pas alignés.

2. On suppose B, C et D non alignés. Montrer que $(\overrightarrow{RC},\overrightarrow{RD})=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})(\pi)$

En déduire l'ensemble décrit par R quand P décrit (δ).

Exercice 14

ABC est un triangle ;H le projeté orthogonal de A sur (BC) ; P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur les droites (AB) et (AC).

1) Montrer que : $(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HB})=(\overrightarrow{CQ};\overrightarrow{CB})[\pi]$ puis que $(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HQ})=(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PQ})[\pi]$

2) Déduisez en que les points B ;P ;C ;Q sont cocycliques .

Exercice 15 ABC est un triangle tel que B et C soient fixes et A variable dans le plan vérifiant :

$$(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{3}[\pi]$$

1) Quel est l'ensemble des points A ?
2) Soit B' le symétrique de B par rapport à (AC) et C' le symétrique de C par rapport à (AB). Démontrer que : (BB') et (CC') sont sécantes.
3) On note D le point d'intersection de (BB') et (CC'). A quelle figure le point D appartient –il ?

Exercice 16

Soit ABC un triangle, F le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Pour tout point M la droite passant par M et orthogonal à (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q.

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{FP};\overrightarrow{FQ}\right)+\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)[\pi]$
2) Déterminer l'ensemble des points M tels que : F, P et Q soient alignés.
3) Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$\left(\overrightarrow{FP};\overrightarrow{FQ}\right)=\alpha[\pi]$

Exercice 17

ABC est un triangle et M un point qui se projette orthogonalement sur (BC), (CA) et (AB) respectivement en P, Q et R.

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MR}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{QR}\right)[\pi]$
2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MR}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{PR}\right)[\pi]$
3) En déduire que : $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{PR};\overrightarrow{QR}\right)[\pi]$
4) Démontrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
(La droite contenant les points P, Q et R est une droite de ***Simson*** de M relativement à ABC).