Série d'exercices sur les coniques

Exercice 1

Soit D une droite du plan P et F un point non situé sur D.

1) Justifier que par tout point M du plan P non situé sur $D \cup \{F\}$ passe une unique conique C de foyer F et de directrice D.
2) Préciser la nature de C suivant les positions du point M.

Exercice 2

Donner la nature et l'excentricité de la conique d'équation cartésienne :

a) $2x^2 + y^2 + 3xy = 1$.

b) $x^2 + y^2 + 6xy + 4\sqrt{2}x = 0$.

c) $x^2 + y^2 + 2xy + 4\sqrt{2}(x - y) = 0$.

Exercice 3

Le plan P est du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points d'affixes $A(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$, $M(z)$ et $N\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$ et $z = re^{i\theta}$.

1) P désigne le barycentre du système $\{(M;2),(N;2)\}$. Exprimer les coordonnées de P en fonction de r et de θ.
2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon OA alors P décrit une un courbe (E) dont on donnera l' équation
3) Tracer cette courbe et préciser ses sommets
4) Soit f l'affinité orthogonal de rapport $k\ (k > 0)$ et d'axe $(O, \vec{u})$. Dé terminer k pour que l'image de la courbe (E) soit un cercle (G) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4

Le plan P est du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées (x, y) vérifiant : $\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$ $t \in IR$

Montrer que le lieu de M est une conique (C)dont on précisera les éléments caractéristiques.
Représenter (C)

Exercice 5

Le plan P est du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M(z) on associe le point M'(z') définie par $z' = z - \frac{1}{z}$ avec $z = re^{i\theta}$ $(r > 0)$

1) Calculer les coordonnées de x' et y' en fonction de r *et* θ
2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon $r = 2$ alors M' décrit une ellipse (E)
3) Déterminer les sommets et les foyers de (E) puis représenter (E).

Exercice 6

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z :

(E) $(\cos^2\theta)z^2 - 4(\cos\theta)z + 5 - \cos^2\theta = 0$.

1. Résoudre (E) dans C. Préciser pour quelle valeur de θ l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.

2. Soit P le plan complexe rapporte à un repère orthonormal. On appelle M' et M'' les points de P dont les affixes respectifs sont les nombres z' et z'' solutions de (E)
Montrer que, lorsque θ varie M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H).Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).

3. Montrer que lorsque θ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'ensemble (F) décrit par les points M' et M'' est une branche de (H).

Exercice 7

Soit AOB un tringle équilatéral du plan oriente tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

On note H le milieu de [AB], I celui de [OB] et (Δ) la médiatrice de [AB]. ON note s la similitude plane directe de centre O transformant le point A en I.

M désigne un point quelconque du plan et M' son image par s.

1) a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.
   b. Construire le point C du plan tel que s(C) = A. (On justifiera la construction).
   c. Exprimer AM' en fonction de CM.
2) On note M'' l'image de M par la réflexion d'axe (Δ). On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que A est équidistant de M' et M''.
   a. montrer que AM''=BM.
   b. Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si CM = 2BM.
   c. Déterminer la nature de (Γ) puis construire (Γ).est du repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Exercice 8

On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées (x,y) vérifiant l'équation :

$25\left(x^2+y^2\right)=\left(3x-16\right)^2\quad(1)$

1) En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice (Δ) d'équation $x=\frac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de (E).
2) Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.
   a) Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.
   b) Démontrer que $OM=\frac{16}{5+3\cos\theta}$.
3) On suppose que $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en M'.
   a) Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.
   b) Démontrer que $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$

Exercice 9

FGH est un triangle équilatéral de coté L. Soit (H) l'hyperbole de foyer F, de directrice (GH) et d'excentricité 2.

1) Déterminer les sommets S et S' de cette hyperbole (on remarquera S et S' sont sur la hauteur issue du sommet issue de F dans le triangle FGH) son centre O et le deuxième foyer en fonction de F'. Calculer en fonction de L, la distance des deux sommets 2a et la distance des deux foyers.
2) On choisie le repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Où O est le centre de l'hyperbole et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la demi droite $[OF)$; Ecrire une équation de (H) et donner l'allure de (H).