Les coniques

Exercice 1

Le plan P est du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Donner la nature, les éléments caractéristique et représenter graphiquement chacune des courbes dont une équation est :
   a) $2x^2+2y^2=8$
   b) $x^2+4y^2=16$
   c) $4x^2+y^2=16$
   d) $4x^2-y^2=16$
   e) $x^2-4y^2=-1$
   f) $4x-y^2=0$
2) Donner l'équation réduite, la nature et les éléments caractéristiques puis représenter graphiquement les courbes dans les cas suivants
   a) $3x^2+4y^2-6x+16y+7=0$
   b) $y^2+2x-2y+3=0$
   c) $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$
   d) $3x^2+x-y-4=0$

Exercice 2

Le plan P est du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M(x ;y) du plan vérifiant l' équation :

$$(m-1)x^2+3my^2+2(m-1)x+m+3=0$$

1) Déterminer la valeur de m pour que (E_m) soit une parabole. ; Tracer cette parabole, préciser son foyer et sa directrice.
2) Pou quelle valeur de m(E_m) est –il un cercle ? préciser dans ce cas son centre et son rayon.
3) Dans cette question m est un réel non nul et différent de 1. Soit O' le point de coordonnées (-1 ;0). On note (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$.
   a) Montrer que l'équation de (E_m) est :$(m-1)X^2+3mY^2+4=0$
   b) Déduisez – en fonction de m, la nature de (E_m).

Exercice 3

Le plan P est du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$..On considère les points d'affixes $A(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\ M(z)\ et\ N\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0\ et\ z=re^{i\theta}; \theta \in R$

1) P désigne l'isobarycentre du système M et N. Exprimer les coordonnées de P en fonction de r et θ
2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon OA alors P décrit une un courbe (E)dont on donnera l' équation
3) Tracer cette courbe et préciser ses sommets
4) Soit f l'affinité orthogonal de rapport $k\ (k>0)$ et d'axe $(O, \vec{v})$. Dé terminer k pour que l'image de la courbe (E) soit un cercle (G) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4

Le plan P est du repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.. Soit M(z) on associe le point M'(z') définie par $z' = z - \frac{1}{z}$ avec$z \neq 0$ et $z = r e^{i\theta}; \theta \in R, r > 0$

1) Calculer les coordonnées de x' et y' en fonction de r et θ
2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon $r = 2$ alors M' décrit une ellipse (E).Déterminer les sommets et les foyers de (E), puis représenter (E).

Exercice 5 :

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle¿ $\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}$¿. On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z : (E) $(\cos^2\theta) z^2 - 4(\cos\theta) z + 5 - \cos^2\theta = 0$.

1. Résoudre (E) dans C. Préciser pour quelle valeur de θ l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.
2. Soit P le plan complexe rapporte à un repère orthonormal. On appelle M' et M'' les points de P dont les affixes respectifs sont les nombres z' et z'' solutions de (E)

Montrer que, lorsque θ varie M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H). Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).

3. Montrer que lorsque θ décrit l'intervalle¿ $\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}$¿. l'ensemble (F) décrit par les points M' et M'' est une branche de (H).

Exercice 6

Soit AOB un tringle équilatéral du plan oriente tel que :$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On note H le milieu de [AB], I celui de [OB] et (Δ) la médiatrice de [AB]. On note s la similitude plane directe de centre O transformant le point A en I.

M désigne un point quelconque du plan et M' son image par s.

1. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

b. Construire le point C du plan tel que s(C) = A. (On justifiera la construction).

c. Exprimer AM' en fonction de CM.

2. On note M'' l'image de M par la réflexion d'axe (Δ). On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que A est équidistant de M' et M''.

a. montrer que AM''=BM.

b. Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si CM = 2BM.

c. Déterminer la nature de (Γ) puis construire (Γ).

Exercice7

Le plan P est du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées (x,y) vérifiant l'équation : $25(x¿¿2+y^2)=(3x-16)^2(1)¿$ 1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice (Δ) d'équation $x=\frac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de (E). Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.
a. Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

b. Démontrer que $OM=\frac{16}{5+3cos\theta}$.

3. On suppose que $\theta\in¿\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}¿$.. La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en M'.

a. Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b. Démontrer que $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$

Exercice 8

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $x(t)\ et\ y(t)$ tels que :¿

1) **a)** Comment $M(-t)$ se déduit de $M(t)$? En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie et déterminer le domaine d'étude utile.

c) Etudier les variations de $x(t)\ et\ y(t)$ sur l'intervalle ¿

2) **a)** Démontrer que (Γ) est contenu dans une hyperbole (H) donner on donnera l' équation et les éléments caractéristiques. On notera (D) et (D') les asymptotes, A et A' les sommets de (H)

b) Construire (H) et préciser la partie de(H) correspondant à (Γ)

3) Soit $M(t_0)$ un point de (Γ). La tangent (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ coupe les asymptotes (D) et (D') en $A_0\ et\ B_0$

a) Démontrer que la tangente (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ a pour équation :

(Δ) : $3x-2(\sin t_0)y-6\cos t_0$

b) Donner les coordonnées de $A_0 \; et \; B_0$ en fonction de t_0

c) Vérifier que $M\left(t_0\right)$ est le milieu du segment $\left[A_0B_0\right]$

4) Soit $F_1\left(0;3\right) \; et \; F_2\left(0;-3\right)$ dans $\left(O,i,j\right)$ .On considère l'ensemble(E) des points M du plan vérifiant : $MF_1 + MF_2 = 10$ et f l' affinité orthogonale de base ($x'x$) et de rapport k.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E) puis représenter (E)

b) Déterminer la valeur de k pour que l'image de (E) soit un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon

Exercice 9

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé$\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.