

EXERCICES DE CALCUL VECTORIEL DANS LE PLAN ET L'ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1

On considère, dans l'espace, les points $A(0 ; -1 ; -1)$, $B(6 ; 1 ; 9)$ et $C(1 ; 0 ; 0)$

- Déterminer une équation cartésienne du plan P , passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{n}(3 ; 1 ; 4)$.
- Déterminer une équation de la sphère de diamètre $[AB]$. Préciser les coordonnées de son centre Ω et son rayon R .
- Soit G le barycentre du système $\{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 2)\}$
 - Déterminer les coordonnées du point G .
 - Déterminer l'ensemble E des points M tels que les vecteurs $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ et \vec{MA} soient colinéaires.
 - Donner une représentation paramétrique de E .

Exercice 2

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace.

On donne les points $A(1 ; 2 ; -3)$, $B(0 ; -1 ; 2)$ et $C(3 ; 1 ; -1)$

- Déterminer une équation du plan P passant par A , B et C .
- Déterminer une équation de la sphère S de diamètre $[AB]$.
- On considère l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0$. Cette équation définit-elle une sphère ? Si oui, préciser son centre et son rayon.

Exercice 3

$ABCD$ est un rectangle du plan, de diagonales $[AC]$ et $[DB]$ de longueur a .

- m est un réel non nul. G_m est le barycentre de $\{(A, m), (B, -1), (C, 1)\}$
 - Préciser la position de G_1 .
 - Quel est l'ensemble \mathcal{E} des points G_m lorsque m décrit \mathbb{R} ?
- Quel est l'ensemble \mathcal{F} des points M du plan tel que $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = a$?
- Quel est l'ensemble \mathcal{F}' des points M du plan tels que le vecteur $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$ soit colinéaire à \vec{AB} ?
- Faire une figure et représenter les ensembles \mathcal{E} , \mathcal{F} et \mathcal{F}' .

Exercice 4

$ABCD$ est un carré.

- Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|$?
- Quel est l'ensemble E' des points M du plan tels que les vecteurs $2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$ et $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}$ soient colinéaires ?
- Quel est l'ensemble E'' des points M du plan tels que $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\|$?

Exercice 5

On considère, dans le plan \mathcal{P} , un triangle ABC non aplati. B' désigne le milieu de $[AC]$, C' le milieu de $[AB]$, D le est le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 2)\}$ et I le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 2), (A, 1), (C, 1)\}$.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(B', 1), (C', 2)\}$ et également du système $\{(D, 5), (C, 1)\}$
En déduire que I est le point d'intersection des droites $(B'C')$ et (CD) .
2. La droite (AI) coupe la droite (BC) en E . Déterminer la position de E sur la droite (BC) .
3. B et C restent fixes. Le point A se déplace dans le plan \mathcal{P} , le segment $[AE]$, où E est le point défini par dans la question 2, conservant une longueur constante. Déterminer les lieux géométriques des point I et D . (On pourra faire apparaître des homothéties).

Exercice 6 *Théorème des trois perpendiculaires*

Soit d une droite contenue dans un plan P . Un point A extérieur à P se projette orthogonalement en B sur P . On note C le projeté orthogonale de B sur d . Démontrer que (AC) et d sont perpendiculaires.

Exercice 7 *Tétraèdre orthocentrique*

Préliminaire : démontrer la relation d'Euler : pour tous points A, B, C et D de l'espace :

$$\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0$$

En déduire que si dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales, alors les deux arêtes restantes sont orthogonales.

Un tétraèdre qui a ses arêtes opposées orthogonales est dit orthocentrique.

Propriété du tétraèdre orthocentrique :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur les faces opposées. (Les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ et (DD') sont les hauteurs du tétraèdre)

1. On suppose que $ABCD$ est un tétraèdre orthocentrique.
 - a) Démontrer que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA') . En déduire que les droites (CD) et (BA') sont perpendiculaires. On notera K leur intersection.
 - b) Démontrer, de même que les droites (BC) et (DA') sont perpendiculaires. En déduire que A' est l'orthocentre du triangle BCD .
 - c) Démontrer, de même, que B' est l'orthocentre du triangle ACD .
 - d) Démontrer que (AB') passe par K . (Utiliser le théorème des trois perpendiculaires)
En déduire que les droites (AA') et (BB') sont concourantes. (On notera H leur intersection)
 - e) Démontrer que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes en H .
(Le point H s'appelle l'orthocentre du tétraèdre)
2. Étude d'une réciproque : on suppose que A' est l'orthocentre du triangle BCD . Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique.

Exercice 8

On considère les deux plans (P) et (Q) dont les équations sont données ci-dessous :

$$(P) : -2x + 6y - 2z + 3 = 0$$

$$(Q) : 3x - 9y + 3z + 6 = 0$$

1. Donner un vecteur normal \vec{n} au plan (P) et un vecteur normal \vec{m} au plan (Q) .
2. Les plans (P) et (Q) sont-ils parallèles ou non ? (Justifier)
3. Soit $A(1 ; 1 ; 0)$. Le point A est-il dans (P) ? Dans (Q) ? Qu'en déduisez vous sur les plans (P) et (Q) ?

Exercice 9

On considère trois plans (P) , (Q) et (R) dont les équations sont données ci-dessous :

$$(P) : x + y - z + 1 = 0$$

$$(Q) : 2x - y + z + 2 = 0$$

$$(R) : x - 2y - z = 0$$

1. Les plans (P) et (Q) sont-ils perpendiculaires ?
2. Les plans (P) et (R) sont-ils perpendiculaires ?
3. Les plans (Q) et (R) sont-ils perpendiculaires ?
4. Déterminer les coordonnées du point A d'intersection des trois plans (P) , (Q) et (R) .

Exercice 10

Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points suivants :

$A(6 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 6 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 4)$, $D(4 ; 0 ; 0)$, $E(0 ; 4 ; 0)$ et $F(0 ; 0 ; 8)$ représentés ci-dessous.

1. Déterminer une équation du plan (ABC) sachant qu'un de ses vecteurs normaux est $\vec{n}(2 ; 2 ; 3)$.
2. On veut déterminer une équation du plan (DEF) . Mais on ne connaît pas de vecteur normal au plan (DEF) . Déterminer des réels a , b et c tels que l'équation :

$$ax + by + cz = 8$$

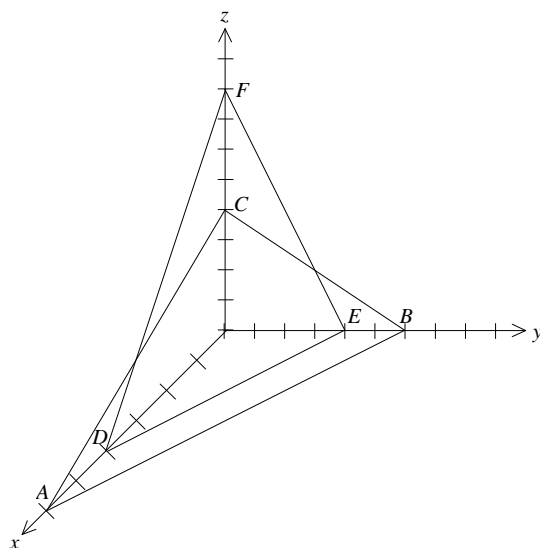
soit une équation du plan (DEF) .

3. Démontrer que les plans (ABC) et (DEF) sont sécants.
4. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 12 \\ 2x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

On notera S l'ensemble de tous ses triplets solutions.

5. À quoi correspond géométriquement l'ensemble S ?
6. Les points $I(0 ; 3 ; 2)$ et $J(3 ; 0 ; 2)$ sont-ils des éléments de S ?



Exercice 11

Dans un repère orthonormé direct de l'espace, on considère les points :

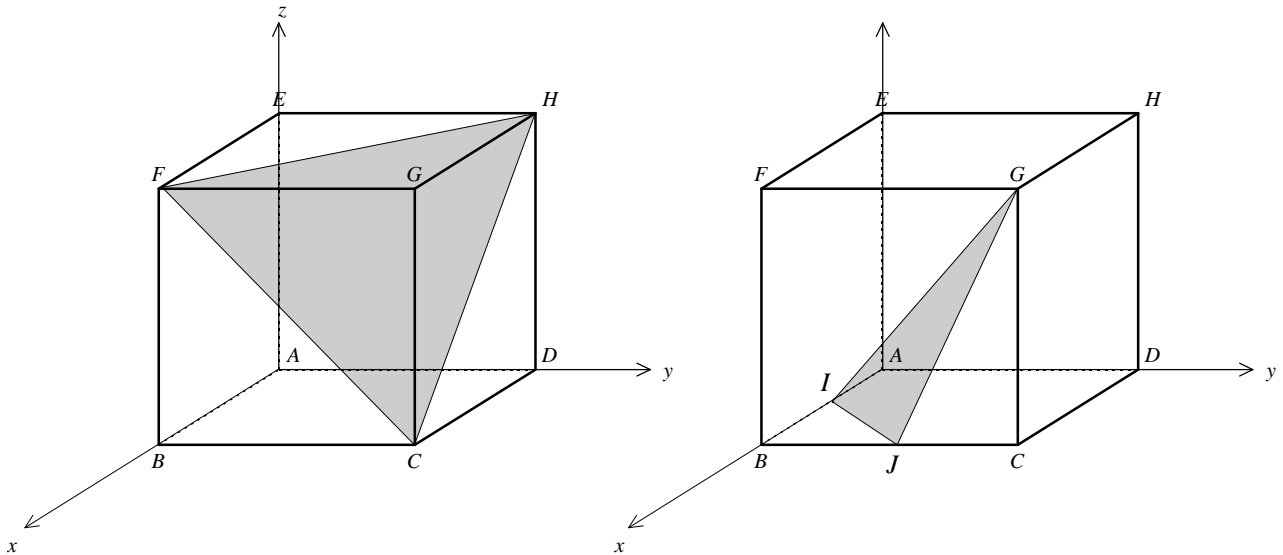
$$A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0)$$

$$E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1)$$

Ainsi, $ABCDEFGH$ est un **cube** de côté 1.

On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

Le but principal de l'exercice est d'étudier l'intersection des plans (CFH) et (IJG)



1) Sans justifications, donner les équations des plans $(ABCD)$, $(ABFE)$ et $(ADHE)$.

2) Étude du plan (CFH) .

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (CFH) .

b) En déduire que \vec{AG} est un vecteur normal au plan (CFH) .

3) Étude du plan (IJG)

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJG) .

b) Le point E appartient-il au plan (IJG) ?

4) Étude de l'intersection des plans (CFH) et (IJG)

a) Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$. On notera S l'ensemble de ses solutions. Que représente S ?

b) Les points $U(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$ et $V(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ sont-ils des éléments de S ?

c) Représenter l'ensemble S .

Exercice 12

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points :

$$A(0 ; 2 ; 5), B(3 ; 0 ; 5) \text{ et } C(3 ; 2 ; 0)$$

1. Placer les points dans le repère. (On dessinera le repère avec des unités au choix)
2. Déterminer une équation du plan (ABC) .
3. Déterminer une équation du plan (P) passant par C et de vecteur normal \vec{AB} .

Exercice 13

On considère les deux plans (P) et (Q) dont les équations sont données ci-dessous :

$$(P) : x + 3y - z + 1 = 0$$

$$(Q) : 2x + 6y + \alpha z + 5 = 0$$

1. Donner un vecteur normal \vec{n} au plan (P) et un vecteur normal \vec{m} au plan (Q) .
2. Comment choisir α pour avoir (P) et (Q) perpendiculaires ?
3. Comment choisir α pour avoir (P) et (Q) parallèles ? Les plans (P) et (Q) sont-ils alors confondus ?
4. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$. Les plans (P) et (Q) sont donc sécants suivant une droite (D) .

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ 2x + 6y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Déterminer deux points A et B de la droite (D) . En déduire un vecteur directeur \vec{v} de la droite (D) .

Exercice 14

On considère trois plans (P) , (Q) et (R) dont les équations sont données ci-dessous :

$$(P) : 2x - y + 3z - 1 = 0$$

$$(Q) : 3x + 2y - z + 2 = 0$$

$$(R) : x - 3y + 2z - 3 = 0$$

On admet que ces trois plans se coupent en un unique point A . Déterminer les coordonnées de A .

Exercice 15

Soit (P) un plan de vecteur normal \vec{n} et (D) une droite de vecteur directeur \vec{v} .

1. Dans cette question, on suppose que la droite (D) est parallèle au plan (P) . Que vaut $\vec{n} \cdot \vec{v}$? Illustrer.
2. On suppose maintenant que $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$. Que peut-on en déduire sur la position relative de la droite (D) et du plan (P) ? Illustrer.

Exercice 16

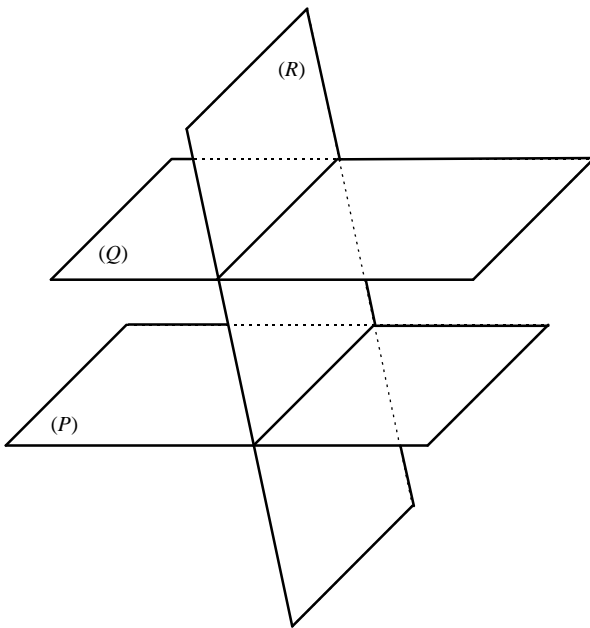
Le but de cet exercice est d'étudier les différentes positions relatives de trois plans dans l'espace.

On note S le système constitué des équations des trois plans (P) , (Q) et (R) .

Examiner chacune des quatre situations ci-dessous et indiquer (par une brève explication) si le système S admet aucun, un seul ou une infinité de triplet(s) solution(s).

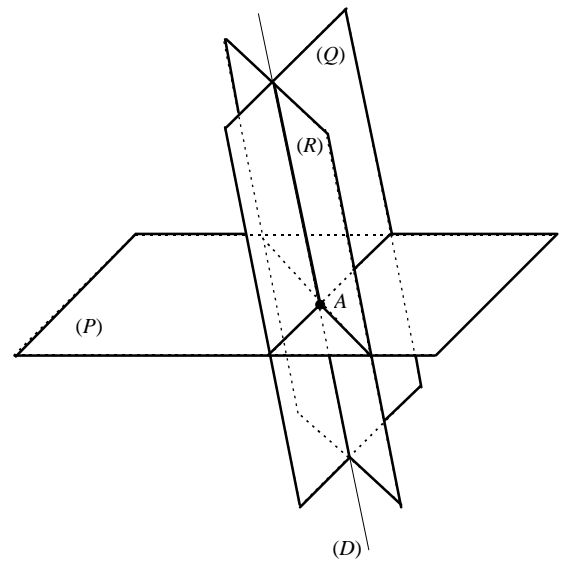
SITUATION A

Plan (R) sécant à deux plans (P) et (Q) strictement parallèles



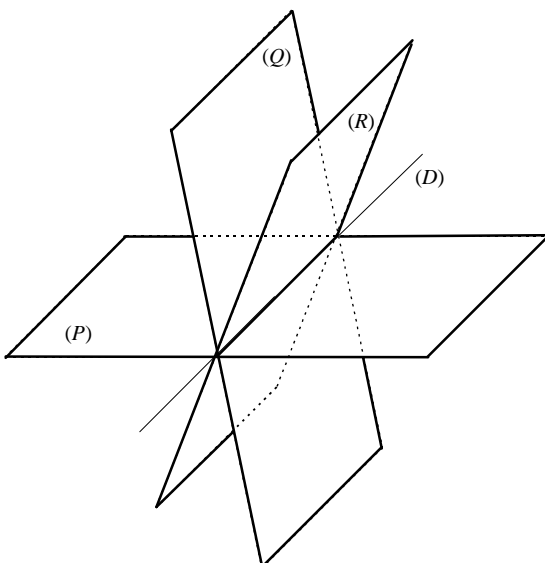
SITUATION B :

Deux plans (Q) et (R) sécants suivant une droite (D) elle-même sécante à un plan (P)



SITUATION C

Trois plans sécants suivant une même droite (D)



SITUATION D

Trois plans sécants deux à deux suivant trois droites strictement parallèles

