Lycée de Richard-Toll **Mr. Fall**
Année scolaire 05-06
Classe de TS1

Paramétrage et Coniques

Exercice1 Le plan est du repère orthonormal direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. On considère le cercle C de centre I et de rayon 1 et la droite (Δ) d'équation $x = 1$. Une droite variable (D) passant par O, coupe le cercle C en A. et la droite (Δ) en A'.
On note M le point de (D) tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA'}$.
La courbe S, lieu des points M lorsque la droite (D) varie, est appelée Strophoïde droite.

Paramétrage N1

1. On note t la pente de la droite (D).
Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t\left(t^2-1\right)}{t^2+1} \end{cases} \quad t \in IR$$

2. **a.** Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.
b. Etudier les variations des fonctions $t \to x(t) \quad et \quad t \to y(t)$ pour $t \in [0,+\infty[$, et construire la courbe S.
3. Calculer la distance de M à la droite (Δ), puis la limite de cette distance lorsque $t \to +\infty$. Interpréter graphiquement.

Paramétrage N2

1. On note θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$.
Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(\theta) = -\cos 2\theta \\ y(\theta) = -\sin 2\theta + \tan\theta \end{cases} \quad \theta \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

(NB : Evaluer l'angle
2. **a.** Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.
b. Etudier les variations des fonctions $\theta \to x(\theta) \quad et \quad \theta \to y(\theta)$ pour $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, et construire la courbe S.
3. Calculer la distance de M à la droite (Δ), puis la limite de cette distance lorsque $\theta \to \frac{\pi}{2}$.
Interpréter graphiquement.

Exercice 2 Le plan P est du repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ y(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad t \in IR$$

a. Montrer que e lieu de M est une conique C dont on précisera les éléments caractéristiques.
b. Représenter C

Exercice 3 Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z : (E) $\left(\cos^2\theta\right)z^2 - 4(\cos\theta)z + 5 - \cos^2\theta = 0$.

1. Résoudre (E) dans C. Préciser pour quelle valeur de θ l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.
2. Soit **P** le plan complexe rapporte à un repère orthonormal. On appelle M' et M'' les points de **P** dont les affixes respectifs sont les nombres z' et z'' solutions de (E).

Montrer que, lorsque θ varie M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H).Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).

3. Montrer que lorsque θ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'ensemble (F) décrit par les points M' et M'' est une branche de (H).

<u>**Exercice 4**</u> Soit AOB un tringle équilatéral du plan oriente tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

On note H le milieu de [AB], I celui de [OB] et (Δ) la médiatrice de [AB]. ON note s la similitude plane directe de centre O transformant le point A en I.

M désigne un point quelconque du plan et M' son image par s.

1. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

b. Construire le point C du plan tel que s(C)=A. (On justifiera la construction).

c. Exprimer AM' en fonction de CM.

2. On note M'' l'image de M par la réflexion d'axe (Δ). On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que A est équidistant de M' et M''.

a. montrer que AM''=BM.

b. Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si CM=2BM.

c. Déterminer la nature de (Γ) puis construire (Γ).

<u>**Exercice 5**</u> Le plan P est du repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées (x,y) vérifiant l'équation : $25\left(x^2+y^2\right)=\left(3x-16\right)^2\quad(1)$

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice (Δ) d'équation $x=\frac{16}{3}$.

Donner la nature et l'excentricité de (E).

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

a. Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

b. Démontrer que $OM=\frac{16}{5+3\cos\theta}$.

3. On suppose ici que θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M'.

a. Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b. Démontrer que $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$

<u>**Exercice 6**</u> ABCD est un carré ; à tout point M du plan on associe son projeté m sur (BD) selon la direction de (AD).

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $2MA^2=Mm^2$

(On pourra introduire le projeté orthogonal H de M sur (BD))

c. Déterminer la nature de (Γ) puis construire (Γ).