Courbes paramétrées

Exercice 1

Soit (Γ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

1) Montrer que (Γ) est un cercle
2) Représenter (Γ)

Exercice 2 (Cardioïde)

Le plan est du repère orthonormal direct (O, i, j).

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) En utilisant la parité et la périodicité des fonctions x(t) et y(t) réduisez l'intervalle d'étude et déterminer les symétriques de la courbe (C)
2) Etudier les variations des fonctions x(t) et y(t)
3) a) Montrer que, si $t \neq \pi$, la droite OM_t a pour vecteur directeur $u = (\cos t)\,i + (\sin t)\,j$.

   b) Déduisez en la tangente au pont $M(\pi)$ de la courbe (C) puis tracer (C).

Exercice 3 (Spirale logarithmique)

Soit (Ψ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Par quelle transformation passe t-on de $M(t)\ \grave{a}\ M(t+2\pi)\ et\ \grave{a}\ M(t-2\pi)$
2) Etudier les variations $t \mapsto x(t) \quad et \quad t \mapsto y(t)$ pour $t \in [0; 2\pi]$
3) Construire la courbe représentative de (Ψ) constituée des points M(t) pour $t \in [0; 2\pi]$
4) Déduisez-en la partie de la courbe de (Ψ) constituée des points M(t) pour $t \in [-2\pi; 2\pi]$

Exercice 4 (courbe de lissajou)

Soit $(\wp)$ la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = cost \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer l'intervalle d'étude utile.
2) Etudier les variations de $x(t)$; $y(t)$
3) Montrer que la courbe est inscrite dans un carré de coté 2
4) Déterminer les points de contact avec ce carré et les tangentes en ces points.
5) Tracer la courbe $(\wp)$.

Exercice5 (cyloide)

Soit (Φ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = R(1-\sin t) \\ y(t) = R(1-cost) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Comparer les coordonnées des points $M(t) \quad et \quad M(t+2\pi)$ et montrer que ces points ce correspondent dans une translation. Déduisez en l'intervalle d'étude utile
2) Etudier les variations de $x(t)$; $y(t)$ et calculer le vecteur dérivée $V(t)$
3) On suppose ici que t est non nul, montrer que la droite (OM_t) admet un vecteur directeur $u\,(t) = \frac{1}{t}(1-\cos t)\,i + \frac{1}{t}(\sin t)\,j$ .déterminer les limites des coordonnées de u et déduisez en la tangente en O à la courbe (Φ)

Exercice 6

Le plan est du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère le cercle C de centre I et de rayon 1 et la droite (Δ) d'équation $x = 1$. Une droite variable (D) passant par O, coupe le cercle C en A. et la droite (Δ) en A'.

On note M le point de (D) tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA'}$.

La courbe S, lieu des points M lorsque la droite (D) varie, est appelée Strophoïde droite.

1) On note t la pente de la droite (D).

 Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t(t^2-1)}{t^2+1} \end{cases} \quad t \in IR$$

2) a. Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.
 b. Etudier les variations des fonctions $t \mapsto x(t) \quad et \quad t \mapsto y(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$, et construire la courbe S.
3) Calculer la distance de M à la droite (Δ), puis la limite de cette distance lorsque $t \to +\infty$. Interpréter graphiquement.