

I. Dénombrement

Exercice

Soit $A = \{1 ; 2 ; 3\}$ et $B = \{a ; b\}$

1. Former mathématiquement les éléments des ensembles $A \times B$ et $B \times A$
2. Déterminer $\text{card.}(A \times B)$ puis $\text{card. } P(B \times A)$.

Exercice

1. Décomposer 360 en facteurs premiers

2. Soient les ensembles $A = \{1 ; 2 ; 2^2 ; 2^3\}$, $B = \{1 ; 3 ; 3^2\}$ et $C = \{1 ; 5\}$

Montrer que tout diviseur de 360 est un élément de $A \times B \times C$. Quelle est le nombre de diviseurs de 360.

3. Généralisation : le nombre N se décomposant en facteurs premiers sous forme :

$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Combien de diviseurs admet-il ?

Exercice

Soit deux ensembles suivants $E = \{x, y, z, t\}$ et $E' = \{a, e, i, u, o\}$

1. Quel est le nombre d'application de E vers E' , de E' vers E puis de E vers E .
2. Peut-on définir une injection de E vers E' , de E' vers E , de E vers E , de E' vers E' ?
3. Si oui donner un exemple et le nombre d'injection.
4. Même question pour une bijection.

Exercice

1. Construire l'arbre de toutes les applications de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ vers l'ensemble $F = \{a, b\}$. Même question de E vers F .

2. Même question pour les injections, surjection de F vers F . puis de E vers E .

Exercice

Démontrer les relations suivantes.

$$A_n^p = n A_{n-1}^{p-1} \quad ; \quad A_n^p = p A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p \quad \text{et} \quad A_{n+1}^p = (n+1) A_n^{p-1}$$

puis résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 - A_n^p x + p A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$

$$(c) C_n^p = C_n^q \Leftrightarrow p = q \text{ ou } p + q = n \quad ;$$

puis résoudre dans \mathbb{R} $C_{3x+2}^{x+1} = C_{3x+2}^{x^2+2x-8}$

Exercice

Dans une classe de 25 élèves, 20 élèves étudient l'anglais 15 étudient l'italien, 17 étudient allemand. Sachant que chaque élève étudie au moins deux de ces trois langues vivantes et de plus chacun étudie au moins l'une des deux langues anglo-saxonnes, déterminer combien d'élèves étudient les deux langues.

Exercice

On veut ranger sept objets dans trois tiroirs A, B, C .

Combien de rangements différents peut-on faire ? (un tiroir pouvant contenir 0, 1 ou plusieurs objets)

Exercice

Un groupe de 10 personnes, se présente à un concours. Quelle est le nombre de sélections différentes qu'on peut faire ?

Exercice

On tape au hasard sur le clavier d'un ordinateur des mots de 4 lettres. Quelle est le nombre de mots différents qu'on peut former?

Exercice

1. Une classe C d'un établissement scolaire groupe 32 élèves. Un cours facultatif de latin est organisé, de combien de façons différentes peut être constitué le groupe des élèves assistant à ce cours ?
2. En fin d'année, on affecte ces élèves à d'autres établissements pour y passer leurs examens. Trois établissements sont susceptibles d'être choisis. Quel est le nombre d'affectations différentes qu'on peut faire ?

Exercice

Une personne entre dans une pâtisserie ne sachant pas si les gâteaux qu'elle verra lui conviendront. Elle observe 10 types de gâteaux. Combien de choix différents peut-elle faire ?

Exercice

Soit les arrangements de 3 chiffres différents choisis parmi les dix symboles de la numérotation décimale.

1. Combien d'arrangements peut-on ainsi faire ?
2. Ces arrangements sont utilisés pour numéroter les billets d'une loterie dont tous les billets sont vendus : seuls les billets dont les numéros se terminent par 02 ; 60 et 80 gagnent un lot.
 - a. Quel est le nombre de billets gagnants ?
 - b. Quel est le nombre de billets comportant le chiffre 0 ?
 - c. Une personne achète 2 billets dont les numéros contiennent le chiffre 0. Quel est le nombre de choix lui permettant de gagner un lot et un seul ?

Exercice

Combien peut-on former de nombres d'au plus quatre chiffres, où chaque chiffre est choisi parmi 1, 2, 3, 4 (on désigne par N le résultat trouvé.)

Parmi ces N nombres, combien ont leurs chiffres tous différents ?

Exercice

Un parking comporte p places libres repérées par les lettres : $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$.

Déterminer le nombre de façons de garer n voitures sur un parking dans chacun de ces cas suivant :

- a) $N = 2$ et $P = 3$ b) $N = 3$ et $P = 5$ c) $N = 5$ et $P = 3$.

Exercice

A. Un sac contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs. De combien de façons différentes peut-on extraire simultanément du sac 3 jetons pour que ces 3 jetons comptent :

1. un jeton noir et un seul
2. deux jetons noirs
3. au moins un jeton noir
4. au plus deux jetons blancs
5. exactement deux jetons blancs
6. aucune jeton noir.

Exercice

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, dont 6 sont défectueuses, on en prélève 4.

De combien de façons différentes peut-on faire le prélèvement dans les cas suivants

- a. les quatre pièces sont bonnes.
- b. une au moins d'entre elles est mauvaise.
- c. deux au moins sont mauvaises.
- d. exactement deux sont mauvaises.
- e. au plus trois sont mauvaises.
- f. toutes sont mauvaises.

Exercice

Un sac contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs. On extrait successivement avec remise 3 jetons.

De combien de façons peut-on extraire du sac 3 jetons pour que ces trois jetons comprennent :

- a. 1 jeton noir et un seul,
- b. 2 jetons noirs,
- c. Aucun jeton noir,
- d. Au moins un jeton noir ?

Exercice

1. On tire successivement et sans remise quatre boules d'un sac contenant dix boules : trois vertes et sept jaunes.

Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

- a. 4 boules jaunes
- b. 4 boules vertes
- c. 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre
- d. 3 jaunes et 1 verte
- e. 2 jaunes et 2 vertes dans cet ordre
- f. 2 jaunes et 2 vertes
- g. au moins 3 vertes
- h. au plus 3 jaunes

2. Reprendre les questions en supposant que le tirage est effectué avec remise.

Exercice

A l'aide des six chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; Combien peut-on écrire :

- a) de nombres de 3 chiffres
- b) de nombres de 3 chiffres distincts
- c) de nombres de 6 chiffres ?

Exercice

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de résultats comprenant :

- 1) exactement 3 valets
- 2) aucun valet
- 3) au moins trois rois
- 4) 2 trèfles et 3 carreaux.

Exercice

Dans un sac il y a 10 boules : Trois boules rouges numérotées 1, 1, 2.

Quatre boules vertes numérotées 1, 2, 2, 3

Trois boules bleues numérotées 1, 2, 3

On tire simultanément 3 boules du sac

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de tirages comprenant :

- a- 3 boules de même couleur,
- b- exactement une boule rouge,
- c- 3 boules de 3 couleur différentes,
- d- au moins une boule rouge,
- e- au plus trois boules rouges,
- f- 3 boules portant les même numéros,
- g- 3 boules portant des numéros dont la somme est égale à 5 ?

Exercice

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 4 boules en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

- 1) Combien y a-t-il de tirages distincts possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
- 3) Combien y a-t-il de tirages comportant autant de boules noires que de boules blanches ?
- 4) Combien y a-t-il de tirages comportant plus de boules noires que de blanches ?

Exercice

Un car transportant 10 sénégalais, 5 maliens et 5 gambiens, se présente à une frontière. Le chauffeur sait que parmi ses passagers, la moitié tente de frauder. Le douanier choisit 4 personnes pour les contrôler

- 1) Combien y a-t-il de choix possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de choix ne comprenant pas de fraudeur ?
- 3) Combien y a-t-il de choix comprenant exactement un fraudeur ?
- 4) Combien y a-t-il de choix comprenant au moins un fraudeur ?
- 5) Combien y a-t-il de choix comprenant 2 sénégalais ,1 malien et 1 gambien ?
- 6) Combien y a-t-il de choix .