Lycée de Matam — Année Scolaire : 07/08

TS1 — MNDOYE

Exercices sur les Equations Différentielles

Exercice 1:

Résoudre chacun des cas suivants et donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

1) $y'-2y=0$ avec $y(0)=1$
2) $y''-2y'+y=0$ avec $y(0)=y'(0)=1$
3) $3y'+7y=0$ avec $y(2)=5$
4) $y''-4y'+3y=0$ avec $y(0)=6$ et $y'(0)=10$
5) $y''-9y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$
6) $y''+y'+y=0$ avec $y(0)=y'(0)=1$
7) $y''+y=0$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$
8) $25y''-20y'+4y=0$ avec $y(0)=y(0)=1$

Exercice 2:

I. On considère la fonction numérique telle que : $f(x)=(x+2)e^{-x}$

a) Etudier les variations et construire sa représentation graphique C dans un repère orthonormé On prendra pour unité de longueur 2cm

b) Déterminer l'équation de la tangente au point où le dérivé second s'annule, créer cette tangente.

c) Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction telle que : $F(x)=(ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f .

En déduire (en cm^2) l'aire du domaine limite par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x=m(m>0)$

Cette aire admet-elle une limite quand $m \mapsto +\infty$?

II. Soit $g(x)=e^{-2x}(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4})$.

a) Montrer que $g(x)$ est une primitive de $[f(x)]^2$

b) Calculer en cm^3 le volume engendré parla rotation de $x'x$ du domaine précédemment définie

Ce volume a-t-il une limite quand $m \mapsto +\infty$?

III.

a) Intégrer l'équation différentielle : $3y''-2y'-y=0$

b) Montrer que la fonction f définie dans la partie I] est une solutio particulière de: $3y''-2y'-y=4xe^{-x}$

En déduire l'intégrale générale de cette dernière équation

Exercice 3:

Dans cet exercice on cherche à calculer l'intégrale $I=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\sin 2x+e^{-x}\cos(x-\frac{\pi}{4})]dx$ à l'aide d'une equation différentielle.

1) Résoudre l'équation : $y''+2y'+2y=0$ (E_1)
2) Résolution de l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+2y=4\cos 2x-2\sin 2x$

1) Déterminer deux réels a et b pour que la fonction définie par $\forall x \in \Re$ $I(x)=a\sin x+b\cos x$ soit solution de (E)
2) f désignant une fonction numérique, on désigne par G la fonction $f.f_1$. Démontrer que f est solution de (E) .
3) Vérifier que la solution de (E) telle que $f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(0)=2$ est $f(x)=\sin 2x+e^{-x}\cos(x-m_4)$
4) Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f
5) En déduire la valeur de l'intégrale I

Exercice 4:

Soit (E) l'équation différentielle due second ordre: $y''-3y'+2y=0$

1)
   a) Quelles sont les solutions de (E) ?
   b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentation C admet au point d'abscisse $x=0$ a même tangente que la courbe C' représentative de $y=e^{3x}$? On dit que C et C' sont tangentes.
2) Représenter dans un repère les tourbes C et C' dont vous préciser les positions relatives
3) λ étant un réel strictement positif, soit h_λ la fonction définie par ; $h_\lambda(x)=-\lambda^2e^x+2\lambda e^{2x}$
   a) Montrer que h_λ est solution de (E)
   b) Soit C_λ la courbe représentative de h_λ .Apres avoir calcule en fonction de λ les coordonnées du point commun a C_λ et C' , montrer que ces ciguës sont tangentes en ce point.
   c) Préciser les positions relatives de C_λ et C

Exercice 5:

Soit (E) l'équation différentielle: $y''+4y'+8y = 20\sin 2x - 10\cos 2x$

1/ Résolvez l'équation $y''+4y'+8y = 0$ (E')

2/ Déterminer les coefficients a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ est solution de (E)

3/ Démontrer que f est la solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E')

4/ Donner toutes les solutions de (E)

Exercice 6:

1) On donne l'équation différentielle: $y''-2y'+y = 0$ (E_1)
   a) Résolvez (E_1)
   b) Déterminer la solution particulière f de (E_1) telle que $f(0) = 4$ et $f(1) = 3e$.
2) On considère maintenant l'équation différentielle $y''-2y'+y = 2e^x$ (E_2)
   Montrer que la fonction g définie sur $\Re$ par $g(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ est solution de (E_2) c'est –à- dire que pour tout réel x , $g''-2g'(x) + g(x) = 2e^x$
3) Calculer $J = \int_1^3 g(t)dt$

Exercice 7;

1) f est la fonction solution de l'équation différentielle $y'-2y = 0$ qui vérifie $f(0) = 1$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.
2) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = (ax + b)f(x)$ soit solution de l'équation différentielle $y'-2y = e^{2x}$ et vérifie $g(0) = 1$.
3) Déduisez-en sans l'intégration par parties la valeur des
   Intégrales: $I = \int_0^1 (x + 1)e^{2x}dx$ et $J = \int_0^1 (2x - 1)e^{2x}dx$
4) Chercher les intégrales particulières de ces équations sous la forme indiquée
   a) $y''+9y = \cos x$; $f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$
   b) $y''+2y'+3y = \cos x$; $f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$
   c) $y''-2y'+3y = e^{-x}\cos x$; $f(x) = e^{-x}(\lambda\cos x + \mu\sin x)$
   d) $y''+y'-2y = 8\sin 2x$; $f(x) = \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x$
   e) $y''+2y'-3y = xe^{-x}$ et $y''+y'+y = xe^{-x}$; $P(x)e^{-x}$, où $P(x)$ est un polynôme.
   f) $y''+2y'-3y = xe^x$; $Q(x)e^x$ où $Q(x)$ est un polynôme

Exercice 8

En 1990, la population du Bénin était d'environ 4 750 000 d'habitants et d'environ 5 500 000 en 1995. On suppose que la vitesse d'accroissement de cette population est proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant.

Dans ces conditions, en quelle année la population du Bénin sera-t-elle de 10 millions d'habitants? de 20 millions d'habitants ?

Exercice 9

Une population a une croissance instantanée relative constante à tout instant t égale à 1,5 %. A l'instant 0, la population est de 3,5 millions d'habitants. Déterminer la population en fonction de t.

Exercice 10

Dans un pays, la consommation d'un produit a diminué régulièrement, la variation relative instantanée à tout instant t étant de – 2 %.

Déterminer l'expression f(t) de cette consommation en kg par habitant en fonction du temps t exprimé en année, sachant que cette consommation est de 12 kg à l'instant $t = 15$.

Exercice 11

Soit la fonction $f : x \mapsto (1 + x)e^{-2x}$.

1) Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution sur IR de l'équation différentielle (E) : $y''+ay'+by = 0.$
2) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de f est solution de (E).
3) Déterminer, parmi les primitives de f, celle qui est solution de (E).

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) Résoudre sur IR l'équation différentielle (E) : $y' = \lambda y$ $(\lambda \in IR)$
   On note f_k la solution vérifiant $f(0) = k$ et C_k sa courbe représentative.
2) Soit x_0 un nombre réel.
   a) Déterminer une équation de la tangente à C_k au point d'abscisse x0.
   b) Démontrer que, lorsque k décrit IR, cette tangente passe par un point fixe dont n déterminera les coordonnées en fonction de λ et x_0 .