Lycée de Richard-Toll Année Scolaire :05/06

Prof **M FALL**

Classes Ts

Exercices sur les Equations Différentielles

Exercice1: Résoudre chacun des cas suivants et donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

a / $y'-2y = 0$ avec $y(0) = 1$

b/ $3y'+7y = 0$ avec $y(2) = 5$

c/ $y''-9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

d/ $y''+y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

e/ $y''-2y'+y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

f/ $y''-4y'+3y = 0$ avec $y(0) = 6$ et $y'(0) = 10$

g/ $y''+y'+y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

h/ $25y''-20y'+4y = 0$ avec $y(0) = y(0) = 1$

Exercice2:

a] Résoudre l'équation différentielle $y''+y'-2y = x^2 + 2x - 1$ (E')

Montrer que (E') admet pour solution particuliere une fonction polynôme de degré 2.En déduire l'intégration générale de l'équation (E').

b] Déterminer s'il en existe une solution particuliere satisfaisant aux conditions initiales suivantes $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

Exercice3:

Soit l'équation différentielle $y''+y'-2y = x^2e^x$ (E').

a] Prouver cette équation différentielle admet pour solution particuliere la fonction C définie par $C(x) = P(x)e^x$ avec p un polynôme de degré 3

b] .En déduire la solution générale de (E').

Soit l'équation différentielle $y''-4y'+4y = (x^2 - 1)\ e^{2x}$

c] Prouver que cette équation différentielle admet une solution particuliere une fonction f définie par $f(x) = q(x)e^{2x}$ avec q un polynôme de degré 4. En déduire l'intégration générale .

Exercice4:

Soit l'équation différentielle $y''+2y'+5y = 2\cos x$ (E').

Prouver cette équation différentielle admet pour solution particuliere de la forme $x \to A\cos x + B\sin x$ .En dréduire la solution générale de (E')..

Meme question avec l'équation différentielle $y''+9y = \cos 3$ (E').Une solution particuliere étant de la former $x \to x(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

a] $y'+y = xe^{-x}$ Une solution particuliere de la forme $y = ze^x$

, z à déterminer

b] $y'+y = e^{-x}$ Solution particuliere de la forme $y = ze^{-x}$

c] $y'-y = \cos x$ Solution particuliere de la forme $y = ze^{-x}$

d] $y'-y = e^x \ln x$ Solution particuliere de la forme $y = ze^{-x}$

Exercice5:

I]-On considère la fonction numérique telle que : $f(x) = (x+2)e^{-x}$

1] Etudier les variations et construire sa representation graphique C dans un repére orthonormal On prendra pour unité de longueur 2cm(on a démontré que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} xe^{-x}$)

Déterminer l'équation de la tangente au point où lq dérivé seconde s'annule,créer cette tangente .

3]Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction telle que : $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f .En déduire (en cm^2)l'aire du

domaine limite par (C,les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = m(m > 0)$)
Cette aire admet-elle une limite quand $m \mapsto +\infty$?

II]/ 1/Soit $g(x) = e^{-2x}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4})$ .Montrer que $g(x)$ est une primitive de $[f(x)]^2$

2/Calculer en cm^3 le volume engendré par par la rotation de $x'x$ du domaine précédemment définie .Ce volume a-t-il une limite quand $m \mapsto +\infty$?

III]- 1/Intégrer l'équation différentielle : $3y''-2y'-y = 0$

2/Montrer que la fonction f définie dans la partie I] est une solution particuliere de: $3y''-2y'-y = 4xe^{-x}$.

En dél'imtégrale générale de cette dernière equation

Exercice6:

Dans cet exercice ,om cherche à calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sin 2x + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})]dx$ à l'aide d'une equation différentielle .

1Résoudre l'équation : $y''+2y'+2y = 0$ (E_1)

2/Résolution de l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+2y = 4\cos 2x - 2\sin 2x$

a/ Déterminer deux réels a et b pour que la fonction définie par $\forall x \in \Re$ $I(x) = a\sin x + b\cos x$ soit solution de (E_1)

b/ f désignant une fonction numérique ,on désigne par G la fonction $f.f_1$ .Démontrer que f est solution de (E) .

3/ a/Vérifier que la solution de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(0) = 2$ est $f(x) = \sin 2x + e^{-x}\cos(x - m_4)$

b/Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f

c/En déduire la valeur de l'intégrale I

Exercice7:

A] - Soit à resource l équation différentielle $y''+y'-2y = x^2 + 2x - 1$

1] Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière une fonction polynôme de degré 2.

2] En déduire l' intégrale générale de l équation différentielle proposée.

3] Déterminer s'il en existe une intégrale particulière satisfaisant aux conditions initiales suivantes; $y(0) = 1, Y'(0) = 2$

B/- Soit l'équation différentielle $y''+y'-2y = x^2e^x$

1] Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière une fonction φ définie par $\varphi(x) = P(x)e^x$ et où P est une function polynôme de degré 3.

2] En déduire l'intégrale générale de l équation différentielle proposée.

C/- Soit l'équation différentielle $y''-4y'+4y = (x^2 - 1)e^{2x}$.

1] Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière une fonction φ définie par $\varphi(x) = Q(x)e^{2x}$ où Q est une function polynôme de degré 4 .

2] En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

D/- Soit l'équation différentielle $y''+2y'+5y = 2\cos x$

1] Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière de la forme $[x \mapsto A\cos x + B\sin x]$

2] En déduire la solution générale de l 'équation différentielle proposée.

E/- Soit l'équation différentielle $y''+9y = \cos 3x$

1/Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière de la forme $[x \mapsto x(A\cos 3x + B\sin 3x)]$

2] En déduire la solution générale de l 'équation différentielle proposée.

F/- Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

1] $2y''+y'-y=2e^x$

2] $y''-7y'+6y=\sin x$

3] $y''+y+\sin 2x=0$ avec les conditions initiales $y(\pi)=y'(\pi)=1$

4] $5y''-6y'+5y=\sin\frac{4}{5}x$ avec les conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$

5] $3y'+2y'=x^3-x^2$

6] $y''-2y'=e^x$

G/- Résoudre les équations différentielles suivantes en determinant une intégrale particulière par la méthode indiquée

1] $y''-y'=x^2+x$.

Chercher intégrale particulière sous la forme d'une fonction polynôme de degré 3

2] $y''+y=(x+1)e^x$.

Effectuer le changement de variable $y(x)=z(x)e^x$.

3] $y''+9y=\cos x : y''+2y'+3y=\cos x$.

Chercher intégrale particulière sous la forme $\lambda\cos x+\mu\sin x$

4] $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$

Chercher intégrale particulière sous la forme $e^{-x}(\lambda\cos x+\mu\sin x)$

5] $y''+y'-2y=8\sin 2x$

Chercher intégrale particulière sous la forme $\lambda\cos 2x+\mu\sin 2x$

6] $y''+2y'-3y=xe^{-x} : y''+y'+y=xe^{-x}$

Chercher intégrale particulière sous la forme $P(x)e^{-x}$, où $P(x)$ est un polynôme.

7] $y''+2y'-3y=xe^x$

Chercher intégrale particulière sous la forme $Q(x)e^x$ où $Q(x)$ est un polynôme

Exercice8:<BAC>

Soit (E) l'équation différentielle due second ordre: $y''-3y'+2y=0$.

1. a/ Quelles sont les solutions de (E) ?

b/ Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentation C admet au point d'abscisse $x=0$ a même tangente que la courbe C' représentative de $y=e^{3x}$?On dit que C et C' sont tangentes .

2. Representer dans un repère les tourbes C et C' dont vous préciser les positions relatives .
3. λ étant un réel strictement positif, soit h_λ la fonction définie par ; $h_\lambda(x)=-\lambda^2e^x+2\lambda e^{2x}$.

a/ Montrer que h_λ est solution de (E)

b/Soit C_λ la courbe représentative de h_λ .Apres avoir calcule en fonction de λ les coordonnées du point commun a C_λ et C' , montrer que ces ciguës sont tangentes en ce point .

c/Préciser les positions relatives de C_λ et C

Exercice9:<BAC>

1/Résolvez l'équation différentielle $y''+16y=0$

2/Trouver la solution f de cite équation vérifiant $f(0)=1$ et $f''(0)=4$

3/Trouver deux reels positifs ϖ et φ tells pour tout reel t $f(t)=\sqrt{2}\cos(\omega t-\varphi)$.

4/Calculer la valeur doyenne de f sur l'intervalle $\left[0:\frac{\pi}{8}\right]$.

Exercice10 :<BAC>

On considère l'éequation differetile :

$$y''-y'+\frac{1}{4}y=0$$

1/Résolvez cette equation

2/Trouver la solution particuliere de cette equation qui verifie les conditions suivantes :-

.sa courbe représentative passe par le point A $(0,4)$;

.la tangente à cette courbe d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0

3/Etudier la fonction f définie sur R par $f(x) = (4 - x)e^{0.5x}$ .Tracer dans un repère orthonormal sa courbe représentative C et la tangente à C 'au point d'abscisse 2 .

4/Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses,la courbe C ,et les courbes d'equation $x = 0$ et $x = 4$ .Indication :on pourra utiliser une intrgration par parties Equation $ay'+by = f(x)$

Exercice11 :<BAC>

Soit (E) l'équation differetile : $2y'+3y = 0$.

1/Determiner toutes les solutions de (E)

2/Soit (E') l'équation differetile $2y'+3y = x^2 + 1$

a/Determiner une fonction f , polynôme du second degré ,solution de (E')

b/Montrer que si g est une solution de (E') ,alors $g - f$ est une solution de (E)

c/Montrer que si $g - f$ est une solution de (E) ,alors g est solution de (E')

3/Donner toutes les solutions de l'équation: $2Y'+3y = \cos x(E')$.

Indication : chercher une solution particulière f de (E'') de la forme $f((x) = A\cos x + B\sin x$

Exercice12;<BAC>

1/ f est la fonction de l'équation différentielle $y'-2y = 0$ qui vérifie $f(0) = 1$ .Déterminer $f(x)$ pour tout réel x .

2/Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = (ax + b)f(x)$ soit solution de l'équation différentielle $y'-2y = e^{2x}$ et vérifie $g(0) = 1$.

3/déduisez-en sans l'intégration par parties la valeur des

intégrales: $I = \int_0^1 (x + 1)e^{2x}dx$; et $J = \int_0^1 (2x - 1)e^{2x}dx$

Exercice13:<BAC>

On se propose de chercher les solutions U définies et dérivables sur $\Re$ telles que pour tout reel x .

$U'(x) + U(x) = \frac{1}{1+e^x}$ [1]

1/Soit f la function définie sur $\Re$ par $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$.

Verifier que f est une solution de [1]

2/On pose $F = U - f$ .On admet que U est solution de [1] si et seulement si F est solution de : $F'+F = 0$ {2]

Résolvez l'équation [2].Déduisez-en toutes les fomctions solutions de [1]

Equation $ay''+by'+cy = f(x)$

Exercice14:<BAC>

7/Pour x 0 , calculer à l'aide d'une integration par parties: $f(x0 = \int_0^x 2(-t + 1)e^{-t}dt$

.2/On considère l'équation différentielle : $4g''(x) + 4g'(x) + g(x) = 2(x - 4)e^{-x}$ (E)

a/On pose $g(x) = h(x) + f(x)$ .Montrer que si g est solution de (E) ,alors h est solution de l'équation: $4h''(x) + 4h'(x) + h(x) = 0$ (E')

b/Résolvez (E')

c/Déduisez-en l'expression de $g(x0$

d/Déterminerla solution particulière g de (E) dont la courbe présente un extremum en A(o ;1)

Exercice15::<BAC>

Soit (E) l'équation differetile: $y''+4y'+8y = 20\sin 2x - 10\cos 2x$

1/ /Résolver l'équation $y''+4y'+8y = 0$ (E')

2/ Déterminer les coefficients a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ est solution de (E)

3/ Démontrer que f est la solution de (E) si et seulement si $f-g$
Est solution de (E')

4/Donner toutes les solutions de (E')

Exercice16::<BAC

1/ Résolver l'équation differetile:

$y''+y'-6y=0\ [1]$

2/ On se propose de résoudre l'équation : $y''+y'-6y=-6x^2+2x-4\quad[2]$

a/ Trouver un polynôme p du second degré ;solution de l'équation $[2]$

b/ Montrer que f est solution de $[2]$ équivaut à $f-p$
est solution de $[1]$ .Déduisez-en les solution de $[1]$

Exercice17:<BAC>

1/ On donne l'équation différentielle::

$y''-2y'+y=0\ (E_1)$

a/ Résolvez (E_1)

b/ Déterminer la solution particulière f de (E_1) telle que $f(0)=4\ et\ f(1)=3e$.

2/ On considère maintenant l'équation différentielle : $y''-2y'+y=2e^x\ (E_2)$

Montrer que la fonction g définie sur $\Re$ par $g(x)=(x^2-5x+7)e^x$ est solution de (E_2)
c'est –à- dire que pour tout réel x , $g''-2g'(x)+g(x)=2e^x$

3/ Calculer $J=\int_1^3 g(t)dt$

Indication:on pourra remarquer que g est solution de (E_2) et donc $g(t)=-g''(t)+2g'(t)+2e^t$

Exercice18:

1/Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f_0=x\mapsto ax\cos 2x+bx\sin 2x$ soit solution sur $\Re$ de l'équation $(E): y''+4y=\cos 2x+\sin 2x$

2/siot f une fonction deux fois derivable sur $\Re$

On pose $f=g+f_0$

Montrer que f est solution de (E) sur $\Re$ si et seulement si g est solution sur $\Re$ de (E') : $Y''+4=0$.

En déduire toutes les solutions de (E) sur $\Re$

3/Déterminer la solution de (E) sur $\Re$ vérifiant les conditions initiales $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{8}$ et $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}$

Exercice19:

1/Résoudre dans $\Re$ l'équation:

$y''-y'-6y=-6x-1$

(<u>Indication</u>: on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du premier degré)

2/ Résoudre dans $\Re$ l'équation:

$y''+2y'-3y=10\cos x$

(<u>Indication</u>: on cherchera une solution particulière sous la forme $g(x)=a\cos x+b\sin x$ avec a et b réels)

Exercice20:

Résoudre les équation:s différentielles suivantes

a/ $4y'+3y=0$

b/ $6y'-9y=0$

c/ $y''-4y'+3y=0$

d/ $4y''+9y=0$

e/ $4y''+6y'+y=0$

Exercice21:

Déterminer les solutions de l'équation différentielle vérifiant les conditions données

a/ $y'\sqrt{x}=1$ et $y(1)=0$

b/ $y' = \sin\frac{x}{2}$ et $y(2\pi) = -1$

c/ $y' = x^2 + 1 + \cos x$ et $y(0) = 1$

d/ $y' + 4y = 0$ et $y(0) = 8$

e/ $2y' - y = 0$ et $y(-\frac{1}{2}) = 1$

f/ $y'' - 2y' + 5y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 3$

g/ $y'' + y = 0$

Exercice21:

Déterminer les solutions de l'équation: différentielle dont la courbe (C) vérifie la (les)condition(s) donné(es)

1/ $y' - 3y = 0$ (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$

2/ $y'' - 2y = 0$ (C) passe par le point de coordonnées $(0,0)$ et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

3/ $y'' - 3y' + 2y = 0$ (C) passé par le point de coordonnées $(\ln 2, 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

4/ $y'' - 2y' + 2y = 0$ (C) passe par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, 0)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice22:

Soit l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$ (E)

1/Déterminer une fonction polynôme g de degré deux solution de (E)

2/Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) ssi $f - g$ est solution de (E') : $y' + 2y = 0$

3/a/Résoudre l'équation (E')

b/Donner la solution de (E)

Exercice23:

Soit (E) l'équation $y' - 5y = \sin x$

1/Déterminer deux nombres réels A et B tells que la fonction g définie par $g(x) = A\cos x + B\sin x$ soit solution de l'équation (E) .

2/Soit f une fonction dérivable sur $\Re$ .On pose $h = f - g$

Démontrer que f est solution de (E) ssi h est solution de $y' - 5y = 0$

3/Résoudre l'équation $y' - 5y = 0$

Exercice24:

Soit l'équation: différentielle

$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$

1/Soit φ la fonction définie sur $\Re$ par $\varphi(x) = ke^{4x} \quad k \in \Re$

Déterminer le pour que φ soit solution de (E)

2/ a/Démontrer que toute autre solution f de (E) vérifie $(f - \varphi)'' - 5(f - \varphi)' + 6(f - \varphi) = 0$

b/Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$

3/Déduire des questions1/et2/ la forme générale des solutions de (E)

Exercice25:

(1) $y'' - y' - 6y = -6x - 1$

1/Déterminer a et b réels tels que $g(x) = ax + b$ soit solution de (1)

2/ a/Démontrer que f est solution de (E) ssi $f - g$ est solution de $y'' - y' - 6y = 0$

q/Résoudre $y'' - y' - 6y = 0$

b/En déduire les solutions de (1)

c/Trouver la solution de (1) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$

3/SOIT $f(x) = e^{3x-3} + x$

Etudier ses variations et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (unité $2cm$).

Préciser la tangente au point A d'abscisse 1 et tracer cette tangente.

Exercice26:

A. Soit (E) l'équation différentielle $y''-3y'+2y=0$

1. a/Quelles sont les solutions de (E) ?

   b/ Quelles est la solutions de (E) dont la courbe représentative C admet au point d'abscisse $x=0$ la même tangente que la courbe représentative de $y=e^{3x}$.

On dit que C et C'' sont tangents.

2. Représenter dans un même repère les courbes C' et C' dont on précisera les positions relatives.

3. λ étant un réel strictement positif .Soit h_λ les fonctions telles que $h_\lambda(x)=-\lambda^2e^x+2\lambda e^{2x}$

   a/ Montrer que h_λ est solution de (E)

   b/ Soit C_λ la courbe représentative de h_λ .Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun à C_λ et C' montrer que ces courbes sont tangents en un point

   c/ Préciser les positions relatives de C_λ et C'

B. Soit (E') l'équation différentielle: $y''-3y'+2y=-x^2+x+2$

1/Trouver un polynôme du second degré solution (E') .

2/On pose $f(x)=g(x)-\frac{1}{2}x^2-x$ .Montrer que f est solution de (E')

3/Déterminer dont la courbe représentative passé par le point de coordonnée $(0,2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1