Exercices sur les fonctions continues

Exercice 1 : Calculer les limites des fonctions f définies ci-dessous aux points demandés :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4}$ en 0, en 1, en $-4/3$, en $\pm\infty$

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$ en $+\infty$, en $-\infty$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - 1}$ en 1, en $+\infty$

d) $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ en 2, en $+\infty$, en $-\infty$

e) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{|x| - 1}$ en 1, en -1, en $+\infty$, en $-\infty$

Exercice 2 : Déterminer le nombre a pour que la fonction f suivante soit continue sur $\mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - a & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Exercice 3 : En quels points de $\mathbf{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue.
Représenter f sur l'intervalle $]\,1/5, +\infty\,[$.

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = (x-1)(\mathrm{E}(x) - 2)\ .$$

a) Déterminer les points de $\mathbf{R}$ où la fonction f est continue.
b) Tracer la courbe représentative de f dans l'intervalle $[\,-1, 4\,[$.
c) Sur cet intervalle, la fonction admet-elle un maximum ? un minimum ?

Exercice 5 : Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x(\mathrm{E}(2x) - 2\,\mathrm{E}(x))\ .$$

a) Tracer la courbe représentative de f dans l'intervalle $[\,-2, 2\,[$.
b) Déterminer les points de $\mathbf{R}$ où la fonction f est continue.

Exercice 6 : Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \left| x - 2\,\mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| .$$

1) Etudier la continuité de f.
2) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2, 2]$.
3) Montrer que la fonction f est paire et périodique de période 2.

Exercice 7 : Soit la fonction f définie sur $]-\pi, \pi[-\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x} .$$

Par quelle valeur faut-il prolonger f en 0 pour obtenir une fonction continue sur $]-\pi, \pi[$? (On pourra exprimer f sous forme de polynôme en $\cos x$).
Déterminer de deux manières différentes les zéros de f dans cet intervalle, et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 8 : Soit la fonction f définie par

$$f(x) = (\tan^2 x - 1)\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 3x - \sin x} .$$

a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Trouver le plus grand intervalle $]-a, a[$ possible, sur lequel f puisse se prolonger en une fonction continue F. (On définira $F(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-a, a[$ trouvé).

Exercice 9 : Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = |x-1| - |x-4| + |x-5| - 1 .$$

a) Représenter la fonction f.
b) Quels sont les extrema relatifs de f sur $[0, +\infty[$?
c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, f possède un maximum dans l'intervalle $[0, x]$. On note $g(x)$ ce maximum. Calculer g(x) et représenter g sur le même dessin que f.

Exercice 10 : Soit f et g deux applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$.
On veut démontrer la propriété suivante :
«il existe c dans $[0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$ ».

a) On pose $h(x) = f(x) - x$.

Montrer que h s'annule en au moins un point s de $[0, 1]$. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $g^n(s) = f(g^n(s))$.
(g^n désigne, si $n \geq 1$, la composée $g \circ g \circ \cdots \circ g$, où g figure n fois, et $g^0 = Id$).

b) On pose $u_n = g^n(s)$. Vérifier que $f(u_n) = u_n$ et $g(u_n) = u_{n+1}$.

c) On suppose que la suite u_n est monotone. Montrer qu'elle a alors une limite ℓ. Que peut-on dire de $f(\ell)$ et $g(\ell)$?

d) On suppose que la suite u_n n'est pas monotone. Montrer qu'il existe des nombres u et v tels que $(f-g)(u)(f-g)(v)$ soit négatif. Conclure.

Exercice 11 : Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x^{n+2} - 8x^{n+1} + 7x^n + 36 \ .$$

a) On pose $h(x) = 2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$. Montrer qu'il existe s dans l'intervalle $]\,1,7\,[$, tel que $h(s) = 0$.
b) En déduire qu'il existe trois points A, B, C de la courbe représentative de f, d'abscisses respectives a, b, c, vérifiant
 i) B est le milieu de AC
 ii) $b - a = 1$

Exercice 12 : Soit f une application définie et continue sur un intervalle $[\,a,b\,]$, et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
On suppose que $f(a) = f(b) = m$.
Soit d un nombre réel de l'intervalle $]\,a,d\,[$, et D le point de coordonnées (d,m).
Montrer que toute droite passant par D coupe la courbe $(\mathcal{C})$ en au moins un point.

Exercice 13 : Soit f une application continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[\,a,b\,]$ $(a \neq b)$ telle que $f([\,a,b\,]) = [\,a,b\,]$. (On pourra s'aider d'un dessin).
a) Montrer qu'il existe un point c **et un seul** de $]\,a,b\,[$ tel que $f(c) = c$.

b) Montrer qu'il existe au moins un point d de $]\,a,b\,[$ tel que

$$f(d) = f^{-1}(d) \ ,$$

c) Montrer que si l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

est fini, le nombre de ses éléments est impair.

Exercice 14 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a,b\,]$ où $0 < a < b$, et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On appelle A, le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse a, et B le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse b .
On note α la pente de la droite OA, et β celle de OB.

Montrer que pour tout γ de $]\,\alpha,\beta\,[$, la droite d'équation $y = \gamma x$ coupe la courbe $(\mathcal{C})$.

Faire un dessin illustrant cette situation.

Exercice 15 : Montrer que si f et g sont des fonctions croissantes sur l'intervalle I, il en est de même de $f+g$.
Montrer que si f et g sont des fonctions croissantes et positives sur l'intervalle I, il en est de même de $f \cdot g$.
Que se passe-t-il si f et g sont croissantes négatives ?

Exercice 16 : Soit a, b, c, trois nombres réels, et f l'application définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c \ .$$

a) Montrer que le maximum de $|f|$ sur $[-1,1]$ existe et est strictement positif. On le note $M(a,b,c)$.

b) On pose $g(x) = 4x^3 - 3x$, et l'on suppose que $M(a,b,c) < 1$.
Etudier le signe de $f-g$ en 1, $1/2$, $-1/2$, -1. Et en déduire que $f-g$ s'annule au moins trois fois.

c) Montrer que $M(a,b,c) \geq 1$.

Corrigé des exercices sur les fonctions continues

1) a) La fonction f est continue en zéro, donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -\frac{1}{2} .$$

Le numérateur et le dénominateur de f s'annulent en 1. On peut donc simplifier par $x-1$, alors, pour $x \neq 1$, on a encore

$$f(x) = \frac{x-2}{3x+4} ,$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{3x+4} = -\frac{1}{7} .$$

Le dénominateur de f s'annule en $-4/3$. En utilisant la forme simplifiée, de f, le numérateur est négatif en $-4/3$, et le dénominateur est du signe de $x+4/3$. Alors

$$\lim_{x\to -4/3^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -4/3^-} f(x) = +\infty .$$

A l'infini, le limite de f est celle du rapport des termes de plus haut degré, donc

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3} .$$

b) Lorsque x tend vers $+\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée, et l'on obtient immédiatement

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty .$$

Par contre, en $-\infty$, il y a une forme indéterminée, et on utilise la quantité conjuguée du numérateur :

$$f(x) = \frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}} .$$

On met alors x en facteur, en remarquant que

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x$$

puisque x est négatif. Alors

$$f(x) = \frac{-1-\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}} .$$

Donc

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2} .$$

c) Lorsque x tend vers 1^+, le numérateur est positif et le dénominateur tend vers zéro en étant positif, donc

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on met $\sqrt{x}$ en facteur, donc

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}} ,$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 .$$

d) Quand x tend vers 2^+, on a une forme indéterminée, mais en simplifiant par $\sqrt{x-2}$, on obtient

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} ,$$

et donc

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0 .$$

Si x est supérieur à 2,

$$f(x) = \frac{1 - \dfrac{2}{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{4}{x^2}}} ,$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 .$$

Si x est inférieur à -2,

$$f(x) = \frac{1 - \dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{4}{x^2}}} ,$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1 .$$

e) Lorsque x tend vers 1,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} .$$

Cette expression vaut 1, si $x > 1$, et -1 si $x < -1$, donc

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = -1 .$$

Lorsque x tend vers -1,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{-x-1} .$$

Le numérateur est positif et le dénominateur tend vers zéro, donc

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty .$$

Quand x tend vers l'infini, on écrit

$$f(x) = \frac{\left|1 - \dfrac{1}{x}\right|}{1 - \dfrac{1}{|x|}} \ ,$$

Donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \ .$$

2) La fonction f est continue sur l'intervalle $[\,3, +\infty\,[$, car $x+2$ est un polynôme. De même elle est continue sur $]\,-\infty, 3\,[$ car $2x - a$ est un polynôme. Elle sera continue en 3, donc sur $\mathbf{R}$ si, et seulement si

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3) \ ,$$

soit

$$\lim_{x \to 3^+} (2x - a) = f(3) \ ,$$

donc $6 - a = 5$, c'est-à-dire $a = 1$.

3) Soit n un entier strictement positif. Dire que $\mathrm{E}(1/x) = n$, signifie que

$$n \leq \frac{1}{x} < n + 1 \ ,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \ .$$

Sur l'intervalle

$$I_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

on a alors

$$f(x) = nx$$

et f est continue sur I_n. En particulier f est continue à gauche en $1/n$ et $f(1/n) = 1$.

Dire que $\mathrm{E}(1/x) = 0$, signifie que

$$0 \leq \frac{1}{x} < 1 \ ,$$

c'est-à-dire que x est strictement plus grand que 1.

Sur l'intervalle $I_0 =]\,1, +\infty\,[$, on a alors $f(x) = 0$, et f est continue sur I_0.

Etudions la continuité aux points de la forme $1/n$, où n est entier.
(i) $n = 1$. Dans ce cas

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 0 = 0 \neq 1 = f(1) \ ,$$

et la fonction n'est pas continue en 1.

(ii) $n > 1$. Si x s'approche de $1/n$ par valeurs supérieurs, il se trouve dans I_{n-1}, et donc

$$\lim_{x\to 1/n^+} f(x) = \lim_{x\to 1/n^+} (n-1)x = \frac{n-1}{n} \neq 1 = f\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

et la fonction n'est pas continue en $1/n$.

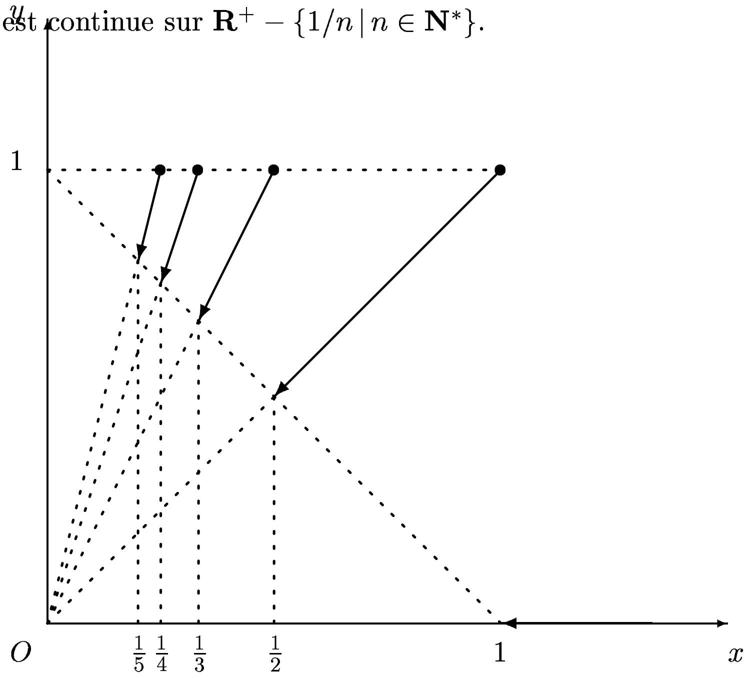
Pour terminer il reste à étudier ce qui se passe en 0^+. En partant de l'encadrement

$$\frac{1}{x} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} ,$$

et en multipliant par x, on obtient

$$1 - x < f(x) \leq 1 ,$$

et il résulte du théorème d'encadrement que $f(x)$ tend vers $1 = f(0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction est donc continue en zéro.
La fonction f est continue sur $\mathbf{R}^+ - \{1/n \,|\, n \in \mathbf{N}^*\}$.



4) Lorsque x appartient à l'intervalle $[\,n, n+1\,[$, où n est entier, on a

$$f(x) = (x-1)(n-2) .$$

La fonction est continue sur tout intervalle $]\,n, n+1\,[$ et est continue à droite en tout point n. Etudions la continuité à gauche aux points entiers.
Lorsque x tend vers n par valeurs inférieures, il se trouve dans l'intervalle $[\,n-1, n\,[$ et sur cet intervalle $f(x) = (n-3)(x-1)$. Donc

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} (n-3)(x-1) = (n-3)(n-1) .$$

Par ailleurs, puisque f est continue à droite

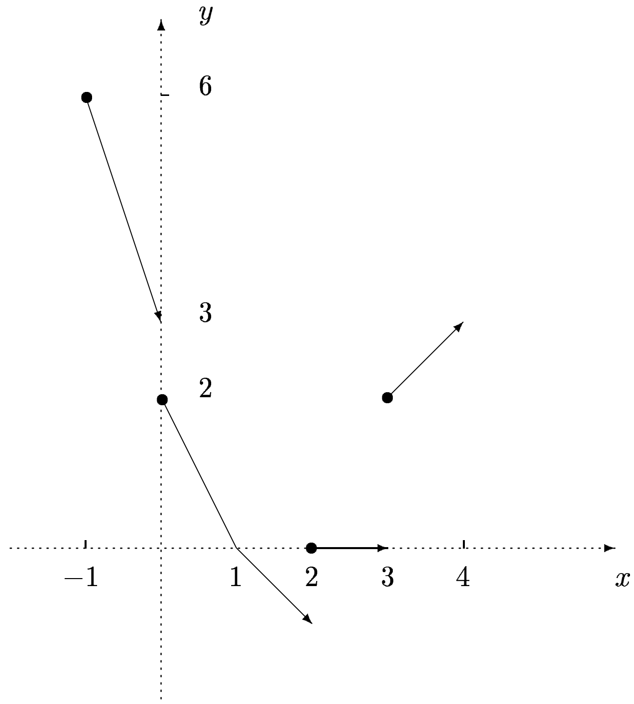
$$f(n) = (n-1)(n-2) = \lim_{x\to n^+} f(x) ,$$

Donc f est continue en n si et seulement si

$$(n-3)(n-1) = (n-1)(n-2) ,$$

soit $n - 1 = 0$. La fonction f est continue sur $\mathbf{R} - (\mathbf{Z} - \{1\})$.

b)



c) Sur cet intervalle la fonction f admet un maximum en $x = -1$, ce maximum vaut 6. Par contre elle n'admet pas de minimum.

5) Dire que $\mathrm{E}(2x) = n$ où n est un entier, signifie que

$$n \leq 2x < n + 1$$

c'est-à-dire que

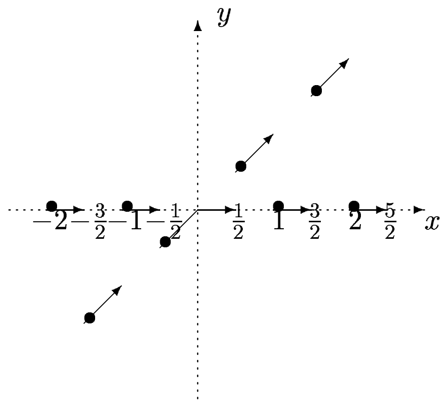
$$\frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2} \ .$$

On étudie donc la fonction sur les intervalles $[\,p, p + 1/2\,[$ et $[\,p + 1/2, p + 1\,[$ où p est entier. Sur ces deux intervalles qui sont inclus dans $[\,p, p + 1\,[$, la partie entière de x vaut p.
Sur $[\,p, p + 1/2\,[$, $2x$ est compris entre $2p$ et $2p + 1$ et $\mathrm{E}(2x) = 2p$. Donc

$$f(x) = x(2p - 2p) = 0 \ .$$

Sur $[\,p + 1/2, p + 1\,[$, $2x$ est compris entre $2p + 1$ et $2p + 2$ et $\mathrm{E}(2x) = 2p + 1$ Donc

$$f(x) = x(2p + 1 - 2p) = x \ .$$



b) La fonction f est continue sur les intervalles $]\,p, p+1/2\,[$ et $]\,p+1/2, p+1\,[$, et continue à droite aux points p et $p+1/2$ pour tout entier p. Il reste à étudier la continuité à gauche en ces points.
A gauche de $p+1/2$, on a $f(x) = 0$, et à droite $f(x) = x$, donc

$$\lim_{x\to(p+1/2)^-} f(x) = 0 \neq p + \frac{1}{2} = f\left(p+\frac{1}{2}\right) .$$

La fonction n'est pas continue en ce point.
A gauche de p, on a $f(x) = x$, et à droite $f(x) = 0$, donc

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = p ,$$

et

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = f(p) = 0 ,$$

et la fonction est continue si et seulement si $p = 0$. Donc f est continue sur $\mathbf{R} - \{n/2 \,|\, n \in \mathbf{Z}^*\}$

6) 1) Si n est entier, on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) = n$$

si et seulement si

$$n \leq \frac{x+1}{2} < n+1 ,$$

soit

$$2n-1 \leq x \leq 2n+1 .$$

Sur l'intervalle $[\,2n-1, 2n+1\,[$, on aura donc

$$f(x) = |x-2n| ,$$

La fonction est continue sur $]\,2n-1, 2n+1\,[$, et continue à droite en $2n-1$. Il reste à voir la continuité à gauche aux points impairs Sur l'intervalle $[\,2n+1, 2n+3\,[$, on aura

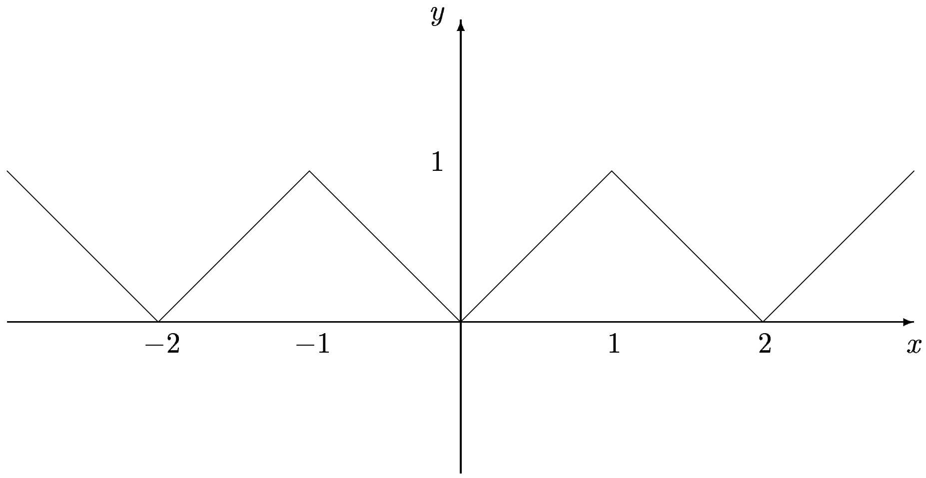
$$f(x) = |x-2n-2| ,$$

donc

$$\lim_{x\to(2n+1)^+} f(x) = \lim_{x\to(2n+1)^+} |x-2n-2| = 1 .$$

Mais
$$\lim_{x\to(2n+1)^-} f(x) = f(2n+1) = 1 \ .$$
La fonction f est donc continue en $2n+1$. Finalement elle est continue sur $\mathbf{R}$.

b)



c) La fonction est 2-périodique. En effet

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \left| x+2-2\,\mathrm{E}\left(\frac{x+3}{2}\right)\right| \\ &= \left| x+2-2\,\mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}+1\right)\right| \ . \end{aligned}$$

Mais, puisque pour tout entier n et tout réel x

$$\mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x)+n \ ,$$

on obtient
$$f(x+2) = \left| x+2-2\left(\mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right)+1\right)\right| = f(x) \ .$$
Pour la parité, on remarque que si x appartient à $[-1,1[$, alors $(x+1)/2$ appartient à $[0,1[$, et donc $f(x) = |x|$. Par ailleurs à cause de la périodicité

$$f(-1) = f(-1+2) = f(1) \ .$$

Donc la restriction de f à l'intervalle $[-1,1]$ est paire. Alors comme elle est 2-périodique, f est paire sur $\mathbf{R}$.

7) On obtient facilement

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad \text{et} \quad \sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1) \ ,$$

donc, pour x non nul,
$$f(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 \ .$$

La limite en zéro de cette fonction vaut donc 1. Et il suffit de prolonger la fonction par la valeur 1 en zéro pour avoir une fonction continue sur $]-\pi,\pi[$.

On résout l'équation de deux manières.
(i) En cherchant les solutions de l'équation

$$\sin 3x = \sin 2x \ ,$$

on obtient une première famille de solutions

$$3x = \pi - 2x + 2k\pi \ ,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{5} \ ,$$

ce qui donne dans $]-\pi,\pi[$ les quatre solutions

$$\frac{\pi}{5} \quad , \quad -\frac{\pi}{5} \quad , \quad \frac{3\pi}{5} \quad , \quad -\frac{3\pi}{5} \ .$$

Par contre, l'équation

$$3x = 2x + 2k\pi \ ,$$

ne donne pas de solution non nulle dans $]-\pi,\pi[$.

(ii) En posant $\cos x = X$, et en cherchant les racines du trinôme

$$P(X) = 4X^2 - 2X - 1 \ .$$

On obtient

$$X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \ .$$

Mais comme X_1 est positif ainsi que $\cos(\pi/5) = \cos(-\pi/5)$, alors que X_2 et $\cos(3\pi/5) = \cos(-3\pi/5)$ sont négatifs. Il en, résulte que

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \ ,$$

et

$$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \ .$$

8) Pour que la fonction soit définie, il faut que $\tan x$ existe, c'est-à-dire $x \neq \pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbf{Z}$, mais il faut aussi que le dénominateur ne s'annule pas. Or l'égalité

$$\sin 3x = \sin x$$

a lieu, ou bien si $3x = x + 2k\pi$, soit $x = k\pi$, ou bien si $3x = \pi - x + 2k\pi$, soit $x = \pi/4 + k\pi/2$. Donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbf{R} - (\{\pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{k\pi \,|\, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi/4 + k\pi/2 \,|\, k \in \mathbf{Z}\}) \ .$$

Les points les plus proches de zéro en lesquels f n'est pas définie sont donc

$$-\pi/2 \quad , \quad -\pi/4 \quad , \quad 0 \quad , \quad \pi/4 \quad , \quad \pi/2$$

On remarquera aussi que la fonction est paire.

b) Transformons $f(x)$. On a

$$\tan^2 x - 1 = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \ ,$$

$$\sin 5x - \sin 3x = 2 \sin x \cos 4x \ ,$$

et

$$\sin 3x - \sin x = 2 \sin x \cos 2x \ .$$

Finalement, si x appartient à $\mathcal{D}_f$

$$f(x) = -\frac{\cos 4x}{\cos^2 x} \ .$$

On a alors

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(-\frac{\cos 4x}{\cos^2 x}\right) = -1 \ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to \pi/4\\ x\neq \pi/4}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \pi/4\\ x\neq \pi/4}} \left(-\frac{\cos 4x}{\cos^2 x}\right) = 2 \ ,$$

de même en $-\pi/4$ par parité. Enfin

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(-\frac{\cos 4x}{\cos^2 x}\right) = -\infty \ ,$$

de même en $-\pi/2$ par parité.
La fonction se prolonge donc en une fonction continue sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$, et sur cet intervalle

$$\tilde{f}(x) = -\frac{\cos 4x}{\cos^2 x} \ .$$

9) a) Pour exprimer la fonction f sans utiliser les valeurs absolues, on peut former le tableau suivant :

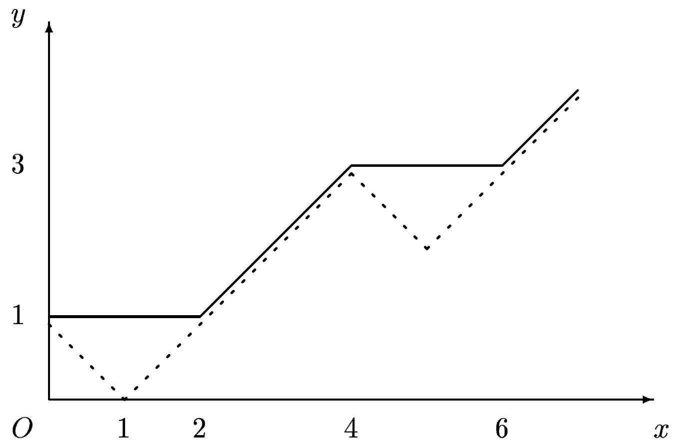
		1	4	5
$\|x-1\|$	$1-x$	$x-1$	$x-1$	$x-1$
$-\|x-4\|$	$x-4$	$x-4$	$4-x$	$4-x$
$\|x-5\|$	$5-x$	$5-x$	$5-x$	$x-5$
-1	-1	-1	-1	-1
$f(x)$	$1-x$	$x-1$	$7-x$	$x-3$

b) Les maxima relatifs sont $f(0) = 1$, $f(4) = 3$, et les minima relatifs sont $f(1) = 0$, et $f(5) = 2$.

c) La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0, x]$, elle possède un maximum dans cet intervalle.
En étudiant les variations ou la courbe représentative de f, on constate facilement que
(i) Lorsque x est compris entre 0 et 2, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point 0, donc $g(x) = 1$.
(ii) Lorsque x est compris entre 2 et 4, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point x, Donc $g(x) = f(x) = x - 1$.

(iii) Lorsque x est compris entre 4 et 6, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point 4, Donc $g(x) = 4$.
(iv) Lorsque x est plus grand que 6, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point x, Donc $g(x) = f(x) = x - 3$.

On a alors les courbes suivantes :



La courbe représentative de g en trait plein a été légérement décalée sur le dessin pour la comparer à celle de f en pointillés.

10) a) On a

$$h(0) = f(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad h(1) = f(1) - 1 \leq 0 \ ,$$

puisque $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$ pour tout x de cet intervalle. Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que h s'annule dans cet intervalle en un point s. Donc $f(s) = s$.
Démontrons par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$g^n(s) = f(g^n(s)) \ .$$

La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie à l'ordre n. Alors

$$g^{n+1}(s) = g(g^n(s)) = g(f(g^n(s)) = g \circ f(g^n(s)) = f \circ g(g^n(s)) = f(g^{n+1}(s)) \ .$$

Elle est donc vraie à l'ordre $n + 1$, donc quel que soit n.

b) Si l'on définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et posant

$$u_n = g^n(s) \ .$$

On a donc, immédiatement

$$u_n = f(u_n) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g^{n+1}(s) = g(g^n(s)) = g(u_n) \ .$$

c) Si la suite est monotone, elle converge dans $[0, 1]$ vers une limite ℓ , et, par passage à la limite, on obtient, puisque f et g sont continues :

$$f(\ell) = \ell \quad \text{et} \quad g(\ell) = \ell \ ,$$

et donc
$$f(\ell) = g(\ell) \ .$$
d) Si la suite n'est pas monotone, elle n'est pas décroissante, et il existe un entier p tel que
$$u_p < u_{p+1} \ .$$
La suite n'est pas non plus croissante, donc il existe un entier q tel que
$$u_q > u_{q+1} \ .$$
Mais, si l'on considère la fonction ϕ définie sur $[0,1]$ par
$$\phi = f - g \ ,$$
On a alors
$$\phi(u_p) = f(u_p) - g(u_p) = u_p - u_{p+1} < 0 \ ,$$
et
$$\phi(u_q) = f(u_q) - g(u_q) = u_q - u_{q+1} > 0 \ ,$$
Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe ℓ dans $[0,1]$ tel que $\phi(\ell)$ soit nul. On obtient bien
$$f(\ell) = g(\ell) \ .$$

11) a) Remarquons que
$$f(x) = x^n(x-1)(x-7) + 36 \ .$$
On a alors
$$h(1) = 2f(1) - f(2) - f(0) = 5 \cdot 2^n > 0 \ ,$$
et
$$h(7) = 2f(7) - f(8) - f(6) = 5 \cdot 6^n - 7 \cdot 8^n < 0 \ ,$$
car $7 > 5$ et $8^n > 6^n$. On a donc $h(1)h(7) < 0$.
Comme la fonction h est un polynôme, donc est continues sur $[1,7]$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique : il existe s dans $]1,7[$ tel que $h(s) = 0$.

b) Posons $a = s-1$, $b = s$ et $c = s+1$. On a
$$b = \frac{a+c}{2} \ ,$$
et, puisque $h(s)$ est nul,
$$f(b) = f(s) = \frac{f(s-1) + f(s+1)}{2} = \frac{f(a) + f(c)}{2} \ .$$
On a donc bien $b - a = 1$, et B est le milieu de AC.

12) Si la droite est verticale, elle coupe la courbe au point de coordonnées $(d,f(d))$. Sinon elle a pour équation
$$f(x) = \lambda(x - d) + m \ .$$

Alors définissons une fonction g sur $[a, b]$ en posant

$$g(x) = f(x) - [\lambda(x - d) + m] \ .$$

C'est une fonction continue comme somme de fonctions continues. De plus

$$g(a) = m - [\lambda(a - d) + m] = -\lambda(a - d) \ ,$$

et

$$g(b) = m - [\lambda(b - d) + m] = -\lambda(b - d) \ .$$

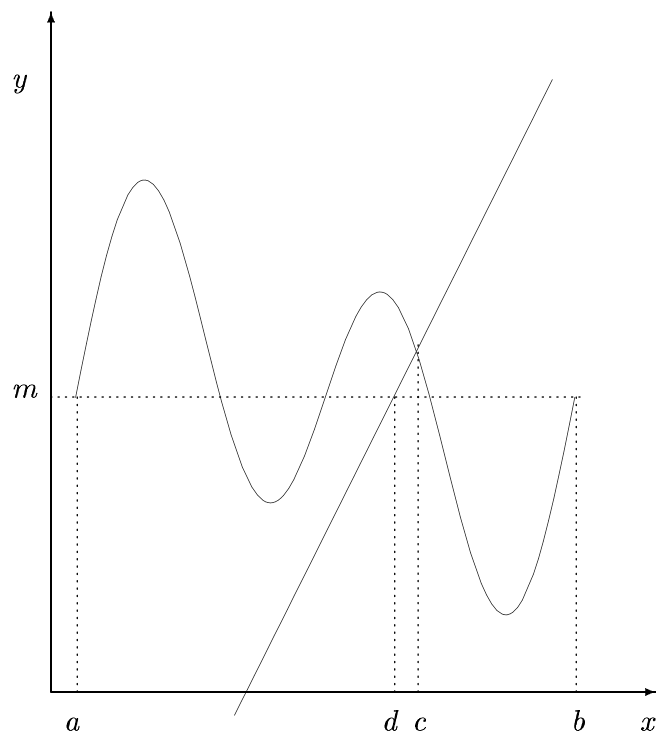
Donc, puisque d se trouve dans $]a, b[$,

$$g(a)g(b) = \lambda^2(d - a)(d - b) \leq 0 \ .$$

Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$, soit

$$f(c) = \lambda(c - d) + m \ .$$

La courbe coupe la droite au point de coordonnées $(c,f(c))$.



13) a) Soit g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - x \ .$$

C'est une fonction continue comme somme de fonctions continues. On a alors

$$g(a) = f(a) - a = b - a \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b = a - b \ .$$

Donc

$$g(a)g(b) = -(b-a)^2 < 0 \ .$$

Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe c dans $]\,a,b\,[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = c$.
Mais on a également

$$\tau_g(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - 1 = \tau_f(x,y) - 1 \ .$$

Donc puisque f est décroissante, $\tau_f(x,y)$ est négatif, et par suite $\tau_g(x,y)$ est strictement négatif. Il en résulte que g est strictement décroissante et continue. Elle est donc injective et il existe au plus un point c tel que $g(c) = 0$. Il y a donc un seul point vérifiant $f(x) = x$.

b) Par définition, $f(x) = y$ si et seulement si $f^{-1}(y) = x$. En particulier, si $x = c$, on a $f(c) = c$ donc $f^{-1}(c) = c$, et finalement $f(c) = f^{-1}(c)$. Le point $d = c$ convient donc.

c) Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ situées dans $]\,a,b\,[$. Soit d_1 un élément de $\mathcal{E}$ tel que $d_1 < f(d_1)$. On a donc

$$f(d_1) = f^{-1}(d_1) \ .$$

Posons $d_2 = f(d_1)$.

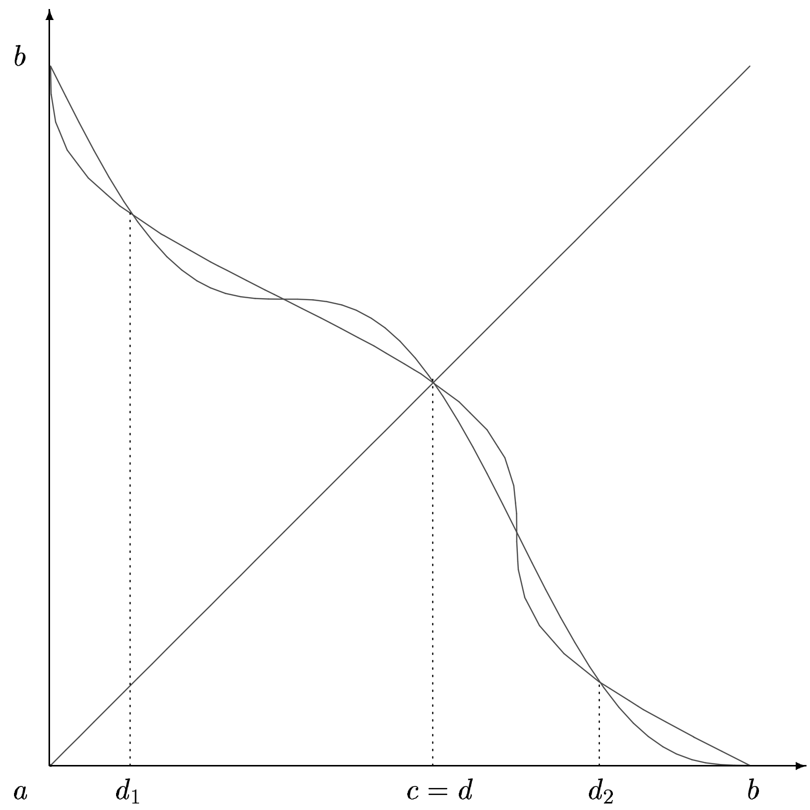
$$d_2 = f(d_1) = f^{-1}(d_1) \ ,$$

donc

$$d_1 = f(d_2) = f^{-1}(d_2) \ ,$$

et il en résulte que d_2 appartient aussi à $\mathcal{E}$. Par ailleurs, puisque $d_1 < d_2$, on en déduit que $d_2 = f(d_1) > f(d_2)$.
L'application f envoie, de manière injective, l'ensemble des points x de $\mathcal{E}$ tels que $x < f(x)$ dans l'ensemble des points x de $\mathcal{E}$ tels que $x > f(x)$. En inversant les inégalités dans la démonstration, elle envoit aussi l'ensemble des points x de $\mathcal{E}$ tels que $x > f(x)$ dans l'ensemble des points x de $\mathcal{E}$ tels que $x < f(x)$. Il y a donc autant d'éléments dans les deux ensembles. En ajoutant l'unique point c tel que $f(c) = c$, il y a donc un nombre impair de points dans $\mathcal{E}$.

Ce qui précède s'explique par la symétrie des graphes de f et de f^{-1} par rapport à la première bissectrice.



14) Soit $M(x)$ le point de coordonnées $(x,f(x))$. La pente de la droite $OM(x)$ vaut $f(x)/x$. La fonction

$$g \ : x \mapsto \frac{f(x)}{x} \ ,$$

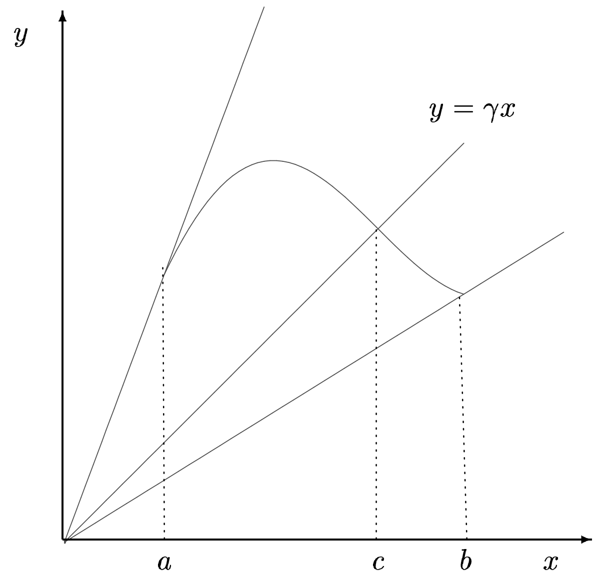
est continue sur $[\,a,b\,]$, et on a

$$g(a)=\alpha \quad \text{et} \quad g(b)=\beta \ .$$

Donc, si γ appartient à l'intervalle $]\,\alpha,\beta\,[$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique, et il existe c dans $]\,a,b\,[$ tel que $g(c)=\gamma$, donc

$$f(c)=\gamma c \ .$$

Cela signifie que la droite d'équation $y = \gamma x$ coupe la courbe (C) au point d'abscisse c.



15) Si f et g sont croissantes sur I, on a, quels que soient x et y dans I vérifiant $x \leq y$ les inégalités

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{et} \quad g(x) \leq g(y) .$$

En additionnant les inégalités, on obtient

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y) = (f+g)(y) ,$$

et $f + g$ est croissante.

Si f et g sont positives, on obtient en multipliant les inégalités

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \leq f(y) \cdot g(y) = (f \cdot g)(y) ,$$

et $f \cdot g$ est croissante.

Si f et g sont négatives, on a

$$-f(x) \geq -f(y) \geq 0 \quad \text{et} \quad -g(x) \geq -g(y) \geq 0 ,$$

et, en multipliant les inégalités,

$$(f \cdot g)(x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) \geq (-f(y)) \cdot (-g(y)) = (f \cdot g)(y) ,$$

donc $f \cdot g$ est décroissante.

16) a) La fonction $|f|$ est continue sur $[-1, 1]$. Elle y atteint donc son maximum. Ce maximum est positif. S'il était nul, on aurait $f(x) = 0$ pour tout x de $[-1, 1]$, et le polynôme f aurait une infinité de racines. Il serait donc nul, et tous ses coefficients seraient nuls, ce qui n'est pas le cas.

b) Si $M(a,b,c) < 1$, on a donc, pour tout x de $[-1, 1]$ l'encadrement

$$-1 < f(x) < 1 .$$

Par ailleurs

$$g(1) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad g(-1) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -1 .$$

Il en résulte que

$$(f-g)(1) = f(1) - 1 < 0 \quad \text{et} \quad (f-g)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 < 0 ,$$

ainsi que

$$(f-g)(-1) = f(-1) + 1 > 0 \quad \text{et} \quad (f-g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 > 0 .$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f-g$ dans les intervalles $]-1, -1/2[$, $]-1/2, 1/2[$ et $]1/2, 1[$, on en déduit que le polynôme $f-g$ possède trois racines distinctes.

c) Mais

$$(f-g)(x) = ax^2 + (b-3)x + c ,$$

est de degré 2 au plus, et a au plus deux racines réelles s'il est non nul. La seule possibilité est que $f = g$. Mais dans ce cas

$$M(a,b,c) = M(0, -3, 0) \geq g(1) = 1 .$$

On obtient donc une contradiction. Il en résulte que l'hypothèse $M(a,b,c) < 1$ est fausse. Donc, quels que soient a, b et c,

$$M(a,b,c) \geq 1 .$$