Etude de fonctions définies par une intégrale

226 - Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

b) A l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.

c) Montrer que f est continue est décroissante.

d) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

a) Posons $g(x,t) = \frac{1}{1+x^3+t^3}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ donc $f(x)$ existe.

b) $u \mapsto 1/u$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{d}u}{1+u^3}$.

Donc $2f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ puis $f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

c) g est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $|g(x,t)| \le \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc f est continue.

Si $x \le y$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, g(y,t) \le g(x,t)$ donc $f(y) \le f(x)$. Ainsi f est décroissante.

Rq : On peut aussi montrer f de classe $\mathcal{C}^1$ mais cela alourdit.

d) $0 \le f(x) \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^3+t^3} \underset{t=xu}{=} \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

227 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

b) Calculer $f(0), \lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f$.

c) On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$.

Montrer que $g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

d) Conclure : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) $g : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto -\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ donc (intégration sur segment) f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

b) $f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$. Pour $x \ge 0$: $0 \le f(x) \le \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Pour $x \le 0$: $f(x) \ge \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} e^{-x}$ donc $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

c) g est $\mathcal{C}^1$ et $g'(x) = 2xf'(x^2) = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

$\left(g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^2\right)' = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t + 2e^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = 0$ car $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2} \mathrm{d}u$.

L'évaluation en 0 permet de conclure.

d) Pour $x \geq 0$: $\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geq 0$ donc $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

228 - Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

$F : (t,x) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$, $\frac{\partial F}{\partial x} : (t,x) \mapsto -t\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} : (t,x) \mapsto t^2\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$.

Sur $\mathbb{R}^+ \times [a,+\infty[$ (avec $a > 0$) ces fonctions sont dominées par $\varphi(t) = e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} t^2\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$.

$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x} \to 0$.

229 - (CCP) Soit f une application continue de $\mathbb{R}\times[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Expliquer pourquoi f est uniformément continue sur $S \times [a,b]$ pour tout segment S de $\mathbb{R}$.

En déduire que $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt$. A l'aide de la question précédente, étudier la continuité de g. Retrouver le résultat en calculant $g(x)$.

$S \times [a,b]$ est compact et toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Etudions la continuité de F en $a \in \mathbb{R}$ et considérons $S = [a-1, a+1]$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,t),(x',t') \in S \times [a,b], \|(x,t)-(x',t')\|_\infty \leq \eta \Rightarrow |f(x,t) - f(x',t')| \leq \varepsilon$

Donc pour $|x-a| \leq \eta$, on a $|F(x) - F(a)| \leq \int_a^b \varepsilon\,dt = \varepsilon(b-a)$. Ainsi F est continue en a.

$(x,t) \mapsto e^{xt}$ est continue par opérations donc g l'est aussi.

Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ et $g(0) = 1$. Sans difficultés g est continue sur $\mathbb{R}$.

Expression de fonctions définies par une intégrale

230 - On considère $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,dt$ pour $x > -1$

a) Montrer que f est bien définie.

b) Exprimer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

a) $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est définie et continue sur $]0,1[$.

Quand $t \to 0^+$, pour $-x < y < 1$, $t^y\frac{t-1}{\ln t}t^x \sim \frac{t^{y+x}}{\ln t} \to 0$.

Quand $t \to 1^-$, posons $h = 1-t \to 0^+$, $\frac{t-1}{\ln t}t^x = -\frac{h}{\ln(1-h)}(1-h)^x \to 1$.

Donc f est bien définie.

b) Soit $a > -1$.

$g(x,t) = \frac{t-1}{\ln t}e^{x\ln t}$ est définie et continue sur $[a + \infty[\times]0,1[$.

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)e^{x\ln t}$ est définie et continue sur $[a+\infty[\times]0,1[$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq (t-1)t^a = \varphi(t)$.

Puisque φ est intégrable, g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

De plus $f'(x)=\int_0^1 (t-1)t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$ d'où $f(x)=\ln\frac{x+2}{x+1}+C$.

Etudions $C=\lim_{x\to+\infty} f(x)$. La fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}$ peut être prolongée par continuité sur $[0,1]$, elle y est donc bornée par un certain M . $0\le f(x)\le\int_0^1 Mt^x=\frac{M}{x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc $C=0$.

231 - En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction $g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}t$.

Posons $f(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}$.

$t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par suite la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=it\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}$.

$t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue et

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le t\mathrm{e}^{-t^2}=\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de x donc g est $\mathcal{C}^1$ et

$g'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}it\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}t=\left[-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}t$ donc $g'(x)+xg(x)=0$.

Après résolution de cette équation différentielle : $g(x)=\lambda\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Enfin $g(0)=\sqrt{\pi}$ donne $\lambda=\sqrt{\pi}$.

232 - On pose $z:x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}\,\mathrm{d}t$ et on donne $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Montrer que z est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $z'(x)=\frac{-1}{2(x+i)}z(x)$.

c) En déduire l'expression de $z(x)$.

a) $t\mapsto g(x,t)=\mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,

$t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=it^2\mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,

$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\le t^2\mathrm{e}^{-t^2}=\varphi(t)$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc z existe, est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$z'(x)=\int_0^{+\infty}it^2\mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}\,\mathrm{d}t\underset{\text{ipp}}{=}-\frac{1}{2(x+i)}z(x)$.

c) $\frac{-1}{2(x+i)}=\frac{-x+i}{2(x^2+1)}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{i}{2(x^2+1)}$ donc $z(x)=C\exp\left(i\frac{\arctan x}{2}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right)=\frac{C\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$.

Puisque $z(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut $z(x)=\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{2(x^2+1)^{1/4}}$.

233 - Soit $F(x)=\int_0^1\frac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}\mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$

b) Calculer $F'(x)$ sur $[0,\pi/2]$

c) Sachant $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$ donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$.

a) Puisque $\cos x \geq 0$, $1+2t\cos x+t^2 \geq 1+t^2$ donc $t \mapsto \dfrac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}$ est définie, continue et positive sur $]0,1]$. De plus $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}=\cos x$. On peut donc prolonger $t\mapsto \dfrac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}$ par continuité en 0 . Par suite $F(x)$ est bien définie.

$(x,t)\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{2\sin x}{1+2t\cos x+t^2}$ est continue sur $[0,\pi/2]\times]0,1]$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq 2=\varphi(t)$.

Puisque φ est intégrable F est $\mathcal{C}^1$.

b) Pour $x=0$, $F'(0)=0$.

Pour $x\neq 0$, $F'(x)=-\displaystyle\int_0^1 \frac{2\sin x}{1+2t\cos x+t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{2\sin x}{(t+\cos x)^2+\sin^2 x}\mathrm{d}t=-\left[2\arctan\frac{t+\cos x}{\sin x}\right]_0^1$.

Or $\arctan\dfrac{\cos x}{\sin x}=\arctan(\tan(\pi/2-x))$ avec $\pi/2-x\in\,]-\pi/2,\pi/2[$ donc $\arctan\dfrac{\cos x}{\sin x}=\pi/2-x$.

et $\arctan\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\arctan\dfrac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}=\pi/2-x/2$.

Donc $F'(x)=2((\pi/2-x)-(\pi/2-x/2))=-x$.

c) $F(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{2\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t=2\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n\,\mathrm{d}t$ or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ puisque la série de nombres satisfait au critère spécial ce qui permet d'écrire $|R_N(t)|\leq\dfrac{t^{n+1}}{n+2}\leq\dfrac{1}{n+2}$ d'où $\|R_N\|_\infty\to 0$.

Par suite $F(0)=2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$ puis $F(x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{x^2}{2}$.

234 - Soit $F(x,y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}\mathrm{d}t$ avec $0<x\leq y$.

Soit $y>0$. Montrer que $x\mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,y]$ et calculer $F'(x)$.

En déduire la valeur de $F(x,y)$.

$f:(x,t)\to\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\mathrm{e}^{-xt}$ sont définies et continues sur $]0,y]\times\mathbb{R}^{+*}$.

$t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Sur $[a,y]\times\mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\mathrm{e}^{-at}=\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par suite $x\mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$.

Donc $F(x,y)=\ln x+C^{te}$ et puisque pour $x=y$, on a $F(x,y)=0$ on obtient $F(x,y)=\ln x-\ln y$.

235 - (Centrale) Existence et calcul de $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

Posons $g(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$. $t\mapsto g(x,t)$, $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et $x\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Pour $x\in[0,a]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq t\mathrm{e}^{-t^2}$ avec $t\mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}-t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

Par intégration par parties, $\varphi'(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x\varphi(x)$.

φ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\varphi(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$.

Fonction Gamma

236 - On rappelle que la valeur de $\Gamma(1/2)$ est connue. En déduire les valeurs de $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Sachant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ on a

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \ldots = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$ donc

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2^{n-1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

237 - Sachant $\Gamma'(1) = -\gamma$, calculer $\Gamma'(2)$.

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$ puis $\Gamma'(2) = 1-\gamma$.

238 - Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

En effet $t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{(\ln t)^k}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$.

Posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Pour tout $x > 0$: $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux.

Pour tout $t > 0$: $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue.

Pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$: $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \le (\ln t)^k(t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi_k(t)$ avec φ_k intégrable sur $]0,+\infty[$. On peut alors appliquer le théorème précédent et conclure.

239 - L'objectif de cet exercice et de calculer $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$

a) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, $0 \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \le \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}$.

b) Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \ln t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

c) Observer que $\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\mathrm{d}u$.

d) Conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler.

a) $0 \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \le \exp\left(-(n-1)\frac{t}{n}\right) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t/n} \le \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}$.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ est limite simple de $u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\chi_{[0,n]}(t)$ et $|\ln(t)u_n(t)| \le \mathrm{e}.\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ donc par convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

c) Par le changement de variable $u = nt$: $\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 n(1-u)^{n-1}\ln(nu)\mathrm{d}u$ avec

$\int_0^1 n\left(1-u\right)^{n-1}\ln(nu)\mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\mathrm{d}u$ et

$\int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\mathrm{d}u = \left[\ln(u)(1-(1-u)^n)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\mathrm{d}u$.

On notera que $n(1-u)^{n-1}$ est primitiver en $(1-(1-u)^n)$ qui s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties n'engage que des intégrales définies.

d) $\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^n-1}{v-1} = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathrm{d}v$ puis $\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$.

Finalement $\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\gamma$.