Exercices sur les fonctions dérivables

Exercice 1 : Calculer les limites des fonctions f définies ci-dessous aux points indiqués :

a) $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$ $(x \to \pi/4)$ b) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^3}{x^3 - 1}$ $(x \to 1)$

c) $f(x) = x\left(1 - \cos\dfrac{1}{x}\right)$ $(x \to +\infty)$ d) $f(x) = x + \ln(1 - e^{2-x}) - \ln(x-2)$ $(x \to 2)$

Exercice 2 : Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.
Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbf{R}$. On veut démontrer que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbf{R}$, en sachant **uniquement** que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$ (et les formules de trigonométries usuelles).
a) Montrer qu'alors $g'(0) = 0$.
b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $f' = g$,
c) Déduire de b) que $g' = -f$.

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des points de $\mathbf{R}$ où la fonction f définie par

$$f(x) = \Big||x-1| - 2\Big|$$

est dérivable.

Exercice 4 : Soit la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x^2\,\mathrm{E}(2x)\ .$$

Trouver les points de $\mathbf{R}$ où f est continue.
Trouver les points de $\mathbf{R}$ où f est dérivable.
Représenter la fonction dans l'intervalle $[-1, 1[$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \cos[\pi x\,\mathrm{E}(x)]\ .$$

a) Déterminer les points de $\mathbf{R}$ pour lesquels f est continue.
b) Déterminer les points de $\mathbf{R}$ pour lesquels f est dérivable.
c) Représenter graphiquement f dans l'intervalle $I = [-2, 3[$.
d) Donner, sans démonstration, l'ensemble des points de I où f atteint son maximum.
e) Donner, sans démonstration, l'ensemble des points de I où f atteint son minimum.

Exercice 6 : Soit n un entier strictement positif. On définit une fonction f sur $\mathbf{R}$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin^2 \dfrac{1}{x} \text{ si } \quad x \neq 0 \\ \\ 0 \text{ si } \quad x = 0 \end{cases}$$

Etudier suivant les valeurs de n, si
a) f est continue sur $\mathbf{R}$
b) f est dérivable sur $\mathbf{R}$
c) f est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$.

Exercice 7 : Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x + x^3 \,\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f possède un *d.l.* d'ordre 2 au voisinage de 0.
b) Montrer que f est dérivable en zéro. Est-elle dérivable dans un intervalle $[-h, h]$ $(h > 0)$? Est-elle deux fois dérivable en zéro?

Exercice 8 : Etudier au voisinage de zéro, la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} \ .$$

Exercice 9 : a) Effectuer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$f(x) = \ln \left[\frac{e^{x+\cos x} - e}{x + x^2} \right] \ .$$

En déduire que f se prolonge par continuité en 0.

b) Montrer que son prolongement est dérivable en zéro, et faire l'étude locale de la fonction au voisinage de 0. (Equation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente, dessin).

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $]-\pi/2, \pi/2[-\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \ .$$

Montrer que cette fonction est prolongeable par continuité en 0.
Soit $\tilde{f}$ son prolongement. La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$? deux fois dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$?

Exercice 11 : Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt \ .$$

Montrer que si x appartient à $]0, \pi/3]$,

$$\ln 3 \cos 3x \leq f(x) \leq \ln 3 \cos x \ .$$

En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Soit $\tilde{f}$ son prolongement.

Calculer $\tilde{f}'(x)$ si $x > 0$, puis justifier que $\tilde{f}$ est deux fois dérivable à droite en zéro.

Exercice 12 : On cherche les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivables en 0, et telles que, pour tout x réel, $f(2x) = 2f(x)$.
a) Calculer $f(0)$.
b) Montrer que pour tout réel x et tout entier n positif

$$2^{-n} f(x) = f(2^{-n}x) \ .$$

c) On pose $y_n = 2^{-n}x$. Calculer de deux manières différentes la limite, quand n tend vers l'infini, du rapport $f(y_n)/y_n$.
d) En déduire les applications cherchées.

Exercice 13 : En étudiant les variations d'une fonction convenable, montrer les inégalités :

a) $2x < \sin 2x + \tan x$ si $x \in]0, \pi/2[$

b) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$ si $x \in]0, \pi/2[$

c) $(x + a)^t \leq 2^{t-1}(x^t + a^t)$, si $x \geq 0$, $a \geq 0$, $t > 1$

Exercice 14 : Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$e^x = 1 + x + x^2 + x^3 \ .$$

Exercice 15 : a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$

$$\frac{1}{n^2 + 2n + 2} \leq \arctan(n + 1) - \arctan n \leq \frac{1}{n^2 + 1} \ .$$

b) On pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2 + 1}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$S_{n+1} - 1 \leq \arctan(n + 1) \leq S_n \ .$$

En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ a une limite S qui vérifie

$$\frac{\pi}{2} \leq S \leq 1 + \frac{\pi}{2} .$$

Exercice 16 : Montrer que, quels que soient les réels x et y,

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y| .$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 17 : Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} \leq \operatorname{th} x \leq x .$$

En déduire un équivalent simple de $\operatorname{th} x$ en zéro.

Exercice 18 : Montrer que, pour tout x réel

$$\ln(1 + x^2) \leq |x| .$$

Exercice 19 : Soit f une application de classe C^1 sur $[\,a, b\,]$. Montrer que

$$(b - a) \min_{a\leq t\leq b} |f'(t)| \leq 2 \max_{a\leq t\leq b} |f(t)| .$$

Exercice 20 : Montrer que pour tout réel positif x, on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} ,$$

et en déduire une valeur approchée rationnelle de $\sin(1/2)$ à 3.10^{-4} près.

Exercice 21 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \operatorname{th} x$.

a) Calculer, la dérivée f''' de f en fonction de $\operatorname{th} x$, et vérifier que pour tout x réel positif, on a $f'(x) \leq 1$ et $f'''(x) \geq -2$.

b) En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout x réel positif, on a

$$x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x .$$

c) En déduire que si l'on remplace $\operatorname{th} 1/4$ par $1/4$, on commet une erreur inférieure à $6 \cdot 10^{-n}$ où n est un entier que l'on déterminera en donnant sa plus grande valeur possible, compte tenu des inégalités précédentes.

Exercice 22 : Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe deux constantes A et B telles que, pour tout x réel positif

$$|f(x)| \leq A \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq B\ .$$

a) Soit α un nombre réel strictement positif. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+\alpha$, montrer que, pour tout x réel,

$$|f'(x)| \leq \frac{2A}{\alpha} + \frac{\alpha B}{2}\ .$$

b) On note $h(\alpha)$ le membre de droite de l'inégalité précédente. Etudier les variations de h dans $]0, +\infty[$. En déduire que pour tout x réel positif

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB}\ .$$

Exercice 23 : a) Montrer que pour tout x réel

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\ .$$

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$,

$$\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}\ .$$

c) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0, \pi/4]$,

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\left(1 - \frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2} \leq \sqrt{1-x^2}\ .$$

d) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0, \pi/4]$,

$$0 \leq \cos x - \sqrt{1-x^2} \leq Mx^4\ ,$$

où M est une constante positive que l'on déterminera.

Exercice 24 : Soit $f(x) = \ln(1+x)$.
a) Calculer la dérivée $n-$ième de f.
b) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en zéro dans l'intervalle $[0, 1/2]$.

c) En déduire que la suite $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k2^k}$ converge et donner sa limite.

Exercice 25 : On pose, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} .$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{1}{(x+1)^{n+\frac{1}{2}}} .$$

b) En utilisant la formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} ,$$

trouver un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} .$$

c) On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$

Montrer que

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right| \leq u_{n+1} .$$

En déduire la limite de la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$.

Exercice 26 : a) Soit x un nombre réel fixé. Montrer que la fonction ϕ_x définie sur $\mathbf{R}^*$ par

$$\phi_x(t) = \frac{\sin(xt^2)}{t} ,$$

se prolonge par continuité en zéro. On peut donc définir sur $\mathbf{R}$ une fonction f en posant

$$f(x) = \int_0^1 \phi_x(t)\, dt .$$

b) Montrer que, quels que soient x et y réels

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y| .$$

Que peut-on en déduire pour la continuité de f ?

c) Montrer que quels que soient les nombres réels t, x et y ($x \neq y$), on a l'inégalité

$$\left| \frac{\sin(xt^2) - \sin(yt^2)}{x-y} - t^2 \cos(xt^2) \right| \leq |x-y| \frac{t^4}{2} .$$

En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et calculer sa dérivée. La fonction est-elle de classe C^1 ?

Exercice 27 : a) Montrer que pour tout réel positif x, on a les inégalités :

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x \ .$$

b) On pose $A = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

Montrer que A appartient à l'intervalle $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$. Calculer $\tan A$. En déduire la valeur de A.

Exercice 28 : Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange, pour une fonction f de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \ .$$

Exercice 29 : Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\frac{2(1-x)}{2x-x^2} \ ,$$

et exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan(x-1)$.

Exercice 30 : Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(3x-4x^3) \ ,$$

et exprimer $f(x)$ en fonction de $\arcsin x$.

Exercice 31 : Etudier et représenter graphiquement les fonctions f et g définies par $f(x) = \arcsin(\sin x)$ et $g(x) = \arctan(\tan x)$.

Exercice 32 : a) Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \ .$$

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan x$.

Exercice 33 : Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} \ .$$

Puis exprimer $f(x)$ à l'aide de $\arctan x$.

Exercice 34 : Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = x + 2\ln(\operatorname{ch} x)$$

Exercice 35 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \int_x^{1-x} e^{t^2}\, dt\ .$$

Calculer sa dérivée. Etudier les variations de f et de f', ses branches infinies, et tracer sa courbe représentative.

Exercice 36 : Calculer

a)	$\cos(\arctan x)$	*b*)	$\sin(\arctan x)$
c)	$\cos(\arcsin x)$	*d*)	$\sin(\arccos x)$
e)	$\tan(\arcsin x)$	*f*)	$\tan(\arccos x)$

Exercice 37 : Résoudre les équations suivantes :

a) $\arctan(2x) + \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$

c) $(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$

Exercice 38 : a) Résoudre l'équation

$$\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(2x^2) = \frac{\pi}{2}\ .$$

b) L'équation

$$\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(2x^2) = \pi$$

a-t-elle une solution ?

Exercice 39 : Résoudre l'équation :

$$\arctan x + \arctan(x^3) = \arctan\frac{1}{x}\ .$$

Exercice 40 : Résoudre l'équation

$$\arctan(x+1)+\arctan(x-1)=\frac{\pi}{4}\ .$$

En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{12}$.

Exercice 41 : Montrer que l'on a la relation suivante, si et seulement si $ab<1$:

$$\arctan a+\arctan b=\arctan\frac{a+b}{1-ab}\ .$$

Application : calculer $\quad 2\arctan\frac{1}{4}+\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{1}{13}\ .$

Exercice 42 : Soit x réel. On pose $t=\arctan \operatorname{sh} x$.
Montrer que : $\tan t=\operatorname{sh} x\ ,\ \sin t=\operatorname{th} x\ ,\cos t=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\ .$

Exercice 43 : Montrer que si $x\leq -1$, on a $\operatorname{argch}(-x)=-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\ .$

Corrigé des exercices sur les fonctions dérivables

1) Si l'on pose $g(x) = \tan x$ la limite cherchée est celle du taux d'accroissement de g entre 0 et x. Donc

$$\lim_{\substack{x\to\pi/4 \\ x\neq\pi/4}} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \ .$$

b) On peut écrire

$$f(x) = \frac{e^{3x} - e^3}{x - 1}\,\frac{1}{x^2 + x + 1} \ .$$

Si l'on pose $g(x) = e^{3x}$, on a alors

$$\frac{e^{3x} - e^3}{x - 1} = \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \ ,$$

et ceci tend vers $g'(1) = 3$, lorsque x tend vers 1. Alors

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} \frac{e^{3x} - e^3}{x^3 - 1} = 1 \ .$$

c) En posant $u = 1/x$, et $g(u) = \cos u$, on peut écrire

$$x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) = -\frac{g(u) - g(0)}{u} \ ,$$

et lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers zéro donc, l'expression précédente tend vers $-g'(0) = 0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) = 0 \ .$$

d) En regroupant tous les termes dans le logarithme, on a

$$\begin{aligned} x + \ln(1 - e^{2-x}) - \ln(x - 2) &= \ln\frac{e^x(1 - e^{2-x})}{x - 2} \\ &= \ln\frac{e^x - e^2}{x - 2} \ . \end{aligned}$$

Si l'on pose $g(x) = e^x$, on a

$$\frac{e^x - e^2}{x - 2} = \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \ ,$$

et ceci tend vers $g'(2) = e^2$. Alors

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ x\neq 2}} (x + \ln(1 - e^{2-x}) - \ln(x - 2)) = 2 \ .$$

2) a) On forme le taux d'accroissement

$$\tau_g(0,x) = \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\cos x - 1}{x} \ .$$

Mais

$$\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2} \ .$$

Donc

$$\tau_g(0,x) = -\frac{2}{x}\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 .$$

Comme $f'(0) = 1$, on en déduit que $f(x) \sim x$ au voisinage de zéro, et donc que

$$\tau_g(0,x) \sim -\frac{2}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x}{2} .$$

Il en résulte que ce taux d'accroissement tend vers zéro, et donc que $g'(0) = 1$.

b) On forme le taux d'accroissement

$$\tau_f(x+h,x) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} .$$

En utilisant les formules de transformation

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) ,$$

on obtient

$$\sin(x+h) - \sin x \sim h\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) .$$

Alors

$$\tau_f(x+h,x) \sim \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) ,$$

et ceci tend vers $\cos x$ lorsque h tend vers zéro. Il en résulte que f est dérivable en x et que $f'(x) = g(x)$.

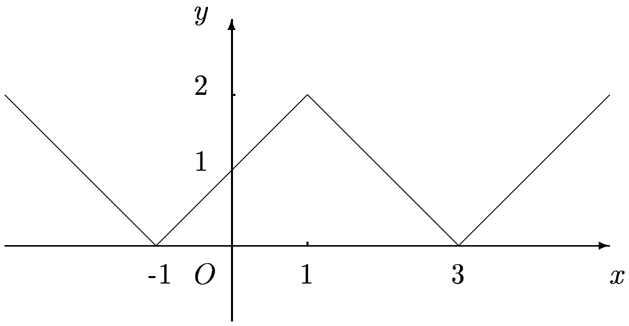
c) Comme $g(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, la fonction g est la composée de deux fonctions dérivables, et

$$g'(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x = -f(x) .$$

3) On a

$$f(x) = \begin{cases} |x-3| & \text{si } x \geq 1 \\ |x+1| & \text{si } x < 1 . \end{cases}$$

La fonction est dérivable sauf aux points -1, 1, et 3.



4) Par définition, $\mathrm{E}(2x) = n$, où n est entier, si et seulement si

$$n \leq 2x < n+1 \ ,$$

soit

$$\frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2} \ ,$$

et dans ce cas

$$f(x) = nx^2 \ .$$

Sur l'intervalle $]\,n/2, (n+1)/2\,[$ la fonction est donc dérivable. De plus elle est continue à droite aux points $n/2$. Etudions la limite à gauche en ce point.
Sur l'intervalle $]\,(n-1)/2, n/2\,[$, $f(x) = (n-1)x^2$, donc

$$\lim_{x\to(n/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(n/2)^-} (n-1)x^2 = \frac{(n-1)n^2}{4} \ .$$

Par ailleurs

$$\lim_{x\to(n/2)^+} f(x) = f(n/2) = \frac{n^3}{4} \ .$$

On a donc continuité en $n/2$ si et seulement si

$$\frac{(n-1)n^2}{4} = \frac{n^3}{4} \ ,$$

ce qui équivaut à $n^2 = 0$, donc à $n = 0$. La fonction est donc continue en zéro mais pas aux autres points de la forme $n/2$ où n est entier. Elle est donc continue sur $\mathbf{R} - \{n/2 \,|\, n \in \mathbf{Z}^*\}$.

Il reste à étudier la dérivabilité en zéro car aux autres points de la forme $n/2$ elle n'est pas continue donc pas dérivable. Si x appartient à l'intervalle $[\,0, 1/2\,[$, $f(x)$ est nulle et $f'(x)$ également. Donc

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \ .$$

Si x appartient à l'intervalle $[\,-1/2, 0\,[$, $f(x) = -x^2$ donc $f'(x) = -2x$. Alors

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0 \ .$$

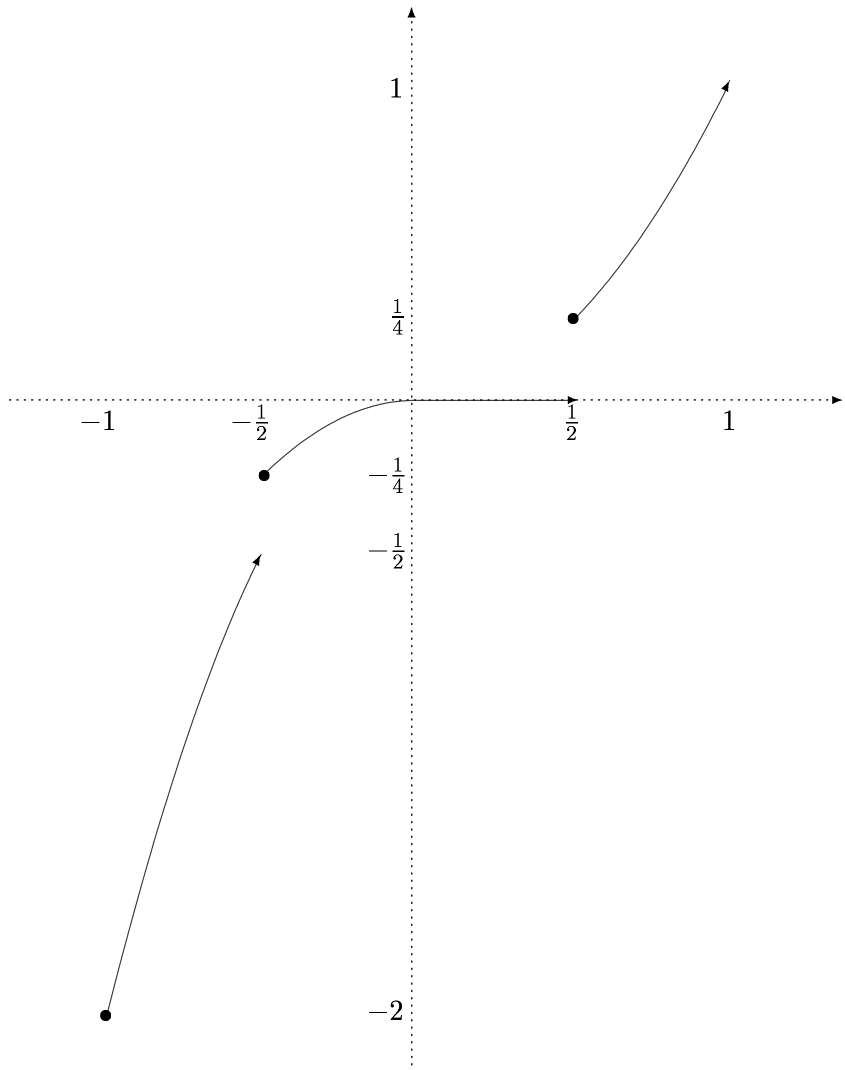
On a donc

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \ .$$

Et comme f est continue à l'origine, cette égalité montre qu'elle est aussi dérivable en ce point et que $f'(0) = 0$.

Pour tracer la courbe, on constate que

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{sur } [-1, -1/2\,[\\ -x^2 & \text{sur } [-1/2, 0\,[\\ 0 & \text{sur } [0, 1/2\,[\\ x^2 & \text{sur } [1/2, 1\,[\end{cases}$$



5) a) Si n est un entier, on a, pour tout x de l'intervalle $[\,n, n+1\,[$

$$f(x) = \cos(n\pi x)\ .$$

La fonction est donc continue sur $]\,n, n+1\,[$, et continue à droite en n, comme composée de fonctions continues.

Etudions ce qui se passe en un point n entier. On a

$$f(x) = \begin{cases} \cos((n-1)\pi x) & \text{si } x \in [\,n-1, n\,[\\ \\ \cos(n\pi x) & \text{si } x \leq [\,n, n+1\,[\end{cases}$$

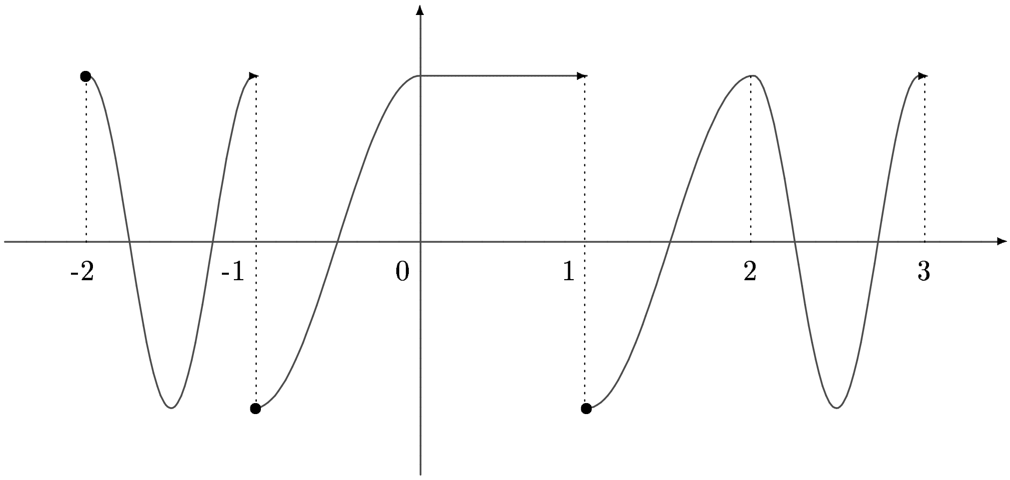
Donc
$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} \cos((n-1)\pi x) = \cos(n(n-1)\pi) = (-1)^{n(n-1)} ,$$
et
$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} \cos(n\pi x) = \cos(n^2\pi) = (-1)^{n^2} = f(n) .$$
La fonction f est continue en n si et seulement si
$$(-1)^{n(n-1)} = (-1)^{n^2} ,$$
c'est-à-dire si et seulement si $(-1)^n = 1$ ou encore, si et seulement si n est pair.

L'ensemble des points où f est continue est donc
$$\mathbf{R} - \{2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\} .$$
b) Sur l'intervalle $]\,n, n+1\,[$, la fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et l'on a
$$f'(x) = -n\pi \sin(n\pi x) .$$
Etudions ce qui se passe en un point n entier. On a
$$f'(x) = \begin{cases} -(n-1)\pi \sin((n-1)\pi x) & \text{si } x \in]\,n-1, n\,[\\ \\ -n\pi \sin(n\pi x) & \text{si } x \leq]\,n, n+1\,[\end{cases}$$

On a donc
$$\lim_{x\to n^-} f'(x) = \lim_{x\to n^-} [-(n-1)\pi \sin((n-1)\pi x)] = -(n-1)\pi \sin(n(n-1)\pi) = 0 ,$$
et
$$\lim_{x\to n^+} f'(x) = \lim_{x\to n^+} [-n\pi \sin(n\pi x)] = -n\pi \sin(n^2\pi) = 0 .$$
Donc, si n est un entier pair, la fonction f étant continue en n, il résulte du théorème de prolongement des dérivées que f est dérivable en n et que $f'(n) = 0$. Par contre en un point impair, f n'est pas dérivable puisqu'elle n'est pas continue, bien que les limites à gauche et à droite de f' en n soient nulles toutes les deux. L'ensemble des points où f est dérivable est donc le même que l'ensemble des points où elle est continue.

c) On a d'après ce qui précède
$$f(x) = \begin{cases} \cos 2\pi x & \text{si } x \in [-2, -1\,[\\ \cos \pi x & \text{si } x \in [-1, 0\,[\\ 1 & \text{si } x \in [0, 1\,[\\ \cos \pi x & \text{si } x \in [1, 2\,[\\ \cos 2\pi x & \text{si } x \in [2, 3\,[\end{cases}$$

On en déduit le dessin suivant :



d) Sur I, la fonction f atteint son maximum qui vaut 1 pour tous les points de l'ensemble $\{-2\,,2\} \cup [\,0,1\,[$.
e) Sur I, la fonction f atteint son minimum qui vaut -1 pour tous les points de l'ensemble $\{-3/2\,,\,-1\,,1\,,5/2\}$.

6) La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme produit et composée de fonctions indéfiniment dérivables. Le seul problème est en zéro.

a) La fonction qui à x associe $\sin^2 \dfrac{1}{x}$ est bornée, et x^n tend vers zéro. Il en résulte que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0 = f(0)\ .$$

La fonction f est continue en 0, donc sur $\mathbf{R}$ tout entier.

b) Formons le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x^{n-1}\sin^2\frac{1}{x}\ .$$

Si $n \geq 2$, le même raisonnement que dans a) montre que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0\ .$$

Dans ce cas f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Et donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Si $n = 1$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sin^2\frac{1}{x}\ ,$$

et cette fonction n'a pas de limite lorsque n tend vers l'infini. Donc f n'est pas dérivable en 0.

c) On a sur $\mathbf{R}^*$

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin^2\frac{1}{x} - x^{n-2}\sin\frac{2}{x}\ .$$

Si $n \geq 3$, le même raisonnement que dans a) montre que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0 = f'(0)\ .$$

Dans ce cas f' est continue en 0, et donc f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Si $n = 2$, on a

$$f'(x) = 2x\sin^2\frac{1}{x} - \sin\frac{2}{x}\ .$$

Et cette expression n'a pas de limite en zéro. Donc f' n'est pas continue en zéro.

7) En utilisant l'encadrement

$$\frac{1}{x} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}\ ,$$

on obtient, si $x > 0$

$$1 - x \leq x\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1\ ,$$

et il résulte du théorème d'encadrement que

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1\ .$$

De même, si $x < 0$

$$1 \leq x\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 - x\ ,$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} x\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1\ .$$

Il en résulte que, quand x tend vers 0, on a l'équivalent

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}\ ,$$

ou encore

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$

Alors

$$f(x) = 3 + 2x + x^2 + \circ(x^2)\ ,$$

et f possède un *d.l.* d'ordre 2 en zéro.

b) La fonction f possède un *d.l.* d'ordre 2, donc d'ordre 0. Il en résulte qu'elle tend vers 3 lorsque x tend vers zéro. Comme $f(0) = 3$, la fonction est continue à l'origine. Elle possède aussi un *d.l.* d'ordre 1 en zéro. Elle est donc dérivable en zéro et $f'(0) = 2$.

La fonction f est discontinue en tout point de la forme $1/n$ où n est un entier non nul. Donc, quel que soit $h > 0$, elle n'est pas continue aux points $1/n$ où $|n| > 1/h$. A *fortiori* f n'est pas dérivable en ces points. Donc f n'est dérivable dans aucun intervalle $[-h, h]$ avec $h > 0$, alors on ne peut pas définir de dérivée seconde en zéro.

8) Il y a dans l'expression deux divisions par x. On commence le calcul avec des *d.l.* d'ordre 5.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^5) \ .$$

Donc

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \circ(x^4) \ ,$$

et ce *d.l.* est à l'ordre 4. On utilise le *d.l.* en zéro à l'ordre 4 de $\ln(1+u)$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4) \ ,$$

Dans lequel on remplace u par $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}$. On a alors

$$\begin{aligned} xf(x) \quad = \quad & \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^2 \\ & +\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^3 \\ & -\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^4 + \circ(x^4) \end{aligned}$$

En mettant en facteur dans chaque parenthèse le terme de plus bas degré, on peut encore écrire

$$\begin{aligned} xf(x) \quad = \quad & \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \\ & -\frac{x^2}{8}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{12}\right)^2 \\ & +\frac{x^3}{24}\left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 \\ & -\frac{x^4}{64} + \circ(x^4) \ , \end{aligned}$$

et en développant

$$\begin{aligned} xf(x) \quad = \quad & \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \\ & -\frac{x^2}{8}\left(1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{9}\right) \\ & +\frac{x^3}{24}(1 + x) \\ & -\frac{x^4}{64} + \circ(x^4) \ . \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} xf(x) &= \frac{x}{2}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)x^2+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)x^3 \\ &\quad +\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{48}-\frac{1}{72}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}\right)x^4+\circ(x^4) \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x-\frac{1}{2880}x^3+\circ(x^3)\ .$$

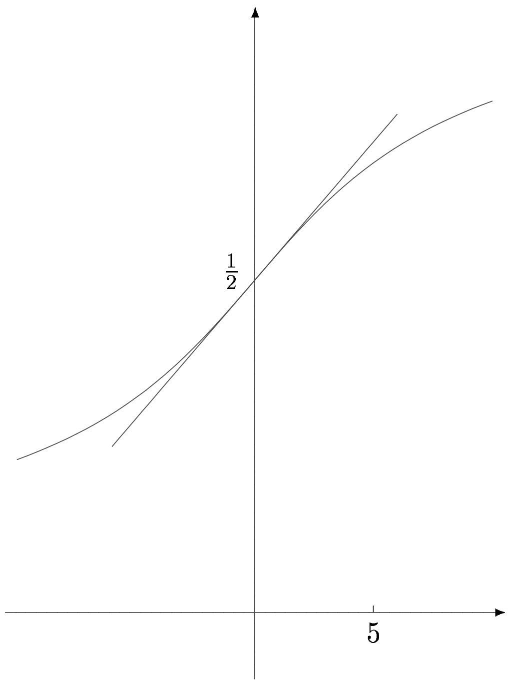
La fonction f se prolonge en zéro par la valeur 1/2. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x\ .$$

Alors

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x\right)=-\frac{1}{2880}x^3+\circ(x^3)\sim-\frac{1}{2880}x^3\ .$$

Lorsque x tend vers 0^+ la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente. Elle sera au-dessus lorsque x tend vers 0^- . La courbe admet donc un point d'inflexion en $x=0$.



.

9) a) En raison de la division par x, on part d'un *d.l.* à l'ordre 3 de $\cos x$. On a

$$x+\cos x=1+x-\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\ .$$

Puis

$$e^{x+\cos x}=e\cdot e^{x-\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)}\ .$$

On utilise le *d.l.* à l'ordre 3 de l'exponentielle en zéro. Alors

$$\begin{aligned} e^{x+\cos x} &= e\left[1+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^3+\circ(x^3)\right] \\ &= e\left[1+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}(x^2-x^3)+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right] \\ &= e\left[1+x-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\right] . \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\frac{e^{x+\cos x}-e}{x+x^2}=\frac{e\left[x-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\right]}{x+x^2}=\frac{e\left[1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right]}{1+x} .$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{e^{x+\cos x}-e}{x+x^2} &= e\left[1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right](1-x+x^2+\circ(x^2)) \\ &= e\left[1-x+\frac{2x^2}{3}+\circ(x^2)\right] . \end{aligned}$$

Finalement

$$f(x)=1+\ln\left(1-x+\frac{2x^2}{3}+\circ(x^2)\right) .$$

En utilisant le *d.l.* à l'ordre 2 en 0 de $\ln x$ on obtient alors

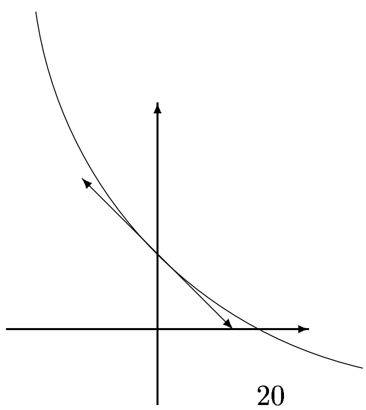
$$\begin{aligned} f(x) &= 1-\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)^2+\circ(x^2) \\ &= 1-x+\frac{x^2}{6}+\circ(x^2) . \end{aligned}$$

La fonction se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1.

b) La fonction prolongée $\tilde{f}$ possède un *d.l.* d'ordre 1 en zéro. Elle est donc dérivable en zéro et $\tilde{f}'(0)=-1$. L'équation de la tangente est $y=-x+1$. La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de

$$\tilde{f}(x)+x-1=\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\sim\frac{x^2}{6} .$$

La courbe est au-dessus de sa tangente.



10) a) En utilisant les développements limités d'odre 3, on a

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \circ\left(x^3\right) \ ,$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ\left(x^3\right) \ ,$$

d'où

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + \circ\left(x^3\right) \ ,$$

alors

$$f(x) = \frac{1}{2} + \circ(1) \ .$$

Donc $f(x)$ tend vers $1/2$ lorsque x tend vers zéro. On prolonge f par continuité en posant $\tilde{f}(0) = 1/2$.

La fonction f est indéfiniment dérivable ($= \mathrm{C}^\infty$) sur $]-\pi/2, \pi/2[-\{0\}$ comme quotient de fonctions indéfiniment dérivables. Le seul problème est en zéro. Pour étudier si f est dérivable en zéro on étudie la limite du taux d'accroissement.

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \frac{\tan x - \sin x - \dfrac{x^3}{2}}{x^4} \ .$$

En utilisant les développements limités d'odre 4, on a

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \circ\left(x^4\right) \ ,$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ\left(x^4\right) \ ,$$

d'où

$$\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2} = \circ\left(x^4\right) \ ,$$

et

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \circ(1) \ .$$

Le taux d'accroissement tend vers zéro. Donc $\tilde{f}$ est dérivable en zéro et $\tilde{f}(0) = 0$.
En dehors de l'origine, $\tilde{f}$ est dérivable et

$$\tilde{f}'(x) = f'(x) = \frac{x\left(1 + \tan^2 x - \cos x\right) - 3\left(\tan x - \sin x\right)}{x^4} \ .$$

Pour étudier si $\tilde{f}$ est deux fois dérivable en zéro, on étudie si $\tilde{f}'$ est dérivable en zéro, en calculant la limite du taux d'accroissement de $\tilde{f}'$.

$$\frac{\tilde{f}'(x) - \tilde{f}'(0)}{x} = \frac{x\left(1 + \tan^2 x - \cos x\right) - 3\left(\tan x - \sin x\right)}{x^5} \ .$$

Pour cela, on cherche un développement limité d'ordre 5 du numérateur. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\tan^2 x &= \left(x + \frac{x^3}{3} + \circ\left(x^3\right)\right)^2 \\
&= x^2\left(1 + \frac{x^2}{3} + \circ\left(x^2\right)\right)^2 \\
&= x^2\left(1 + \frac{2x^2}{3} + \circ\left(x^2\right)\right) \\
&= x^2 + \frac{2x^4}{3} + \circ\left(x^4\right) \ .
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
x\left(1 + \tan^2 - \cos x\right) &= x\left(1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + \circ\left(x^5\right) \\
&= \frac{3x^3}{2} + \frac{5x^5}{8} + \circ\left(x^5\right) \ .
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant les développements d'ordre 5

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \circ\left(x^5\right) \ ,$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \circ\left(x^4\right) \ ,$$

donc

$$3\left(\tan x - \sin x\right) = 3\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{8}\right) + \circ\left(x^5\right) \ .$$

On en déduit

$$\frac{\tilde{f}'(x) - \tilde{f}'(0)}{x} = \frac{1}{4} + \circ(1) \ ,$$

donc $\tilde{f}$ est deux fois dérivable en zéro et $\tilde{f}''(0) = \dfrac{1}{4}$.

11) a) Si x appartient à $]\,0, \pi/3\,]$, et si t est compris entre x et $3x$, on a

$$0 \leq x \leq t \leq 3x \leq \pi \ ,$$

et comme la fonction cosinus est décroissante sur $[\,0, \pi\,]$ on a donc

$$\cos 3x \leq \cos t \leq \cos x \ .$$

Alors en intégrant

$$\int_x^{3x} \frac{\cos 3x}{t}\,dt \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt \leq \int_x^{3x} \frac{\cos x}{t}\,dt \ ,$$

donc

$$\cos 3x \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt \leq f(x) \leq \cos x \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt \ .$$

Les intégrales qui encadrent $f(x)$ se calculent et l'on obtient

$$\cos 3x \Big[\ln t \Big]_x^{3x} \leq f(x) \leq \cos x \Big[\ln t \Big]_x^{3x} ,$$

ce qui donne bien

$$\ln 3 \cos 3x \leq f(x) \leq \ln 3 \cos x .$$

Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ est encadrée par deux fonctions tendant vers $\ln 3$, donc elle tend aussi vers cette valeur, et on prolonge f par continuité en zéro en posant

$$\tilde{f}(0) = \ln 3 .$$

Posons , pour $t > 0$

$$g(t) = \frac{\cos t}{t} ,$$

et désignons par G une primitive de g. On a donc

$$G'(t) = g(t) .$$

Alors

$$f(x) = G(3x) - G(x) ,$$

La fonction f est dérivable et l'on obtient

$$f'(x) = 3G'(3x) - G'(x) = 3g(3x) - g(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} .$$

Comme f' est le quotient de fonctions indéfiniment dérivables, elle est indéfiniment dérivable sur $]\,0, +\infty\,[$. Il reste à étudier la dérivabilité à droite à l'origine. En utilisant les développements limités :

$$\cos x = 1 + \circ(x) ,$$

donc

$$\cos 3x - \cos x = \circ(x) ,$$

et

$$\tilde{f}'(x) = f'(x) = \circ(1) .$$

Comme $\tilde{f}$ est continue à droite en zéro, et que $\tilde{f}'$ possède une limite nulle en zéro, on en déduit que $\tilde{f}$ est dérivable à droite en zéro et

$$\tilde{f}'(0) = 0 .$$

Pour étudier la dérivée seconde en zéro, on forme le taux d'accroissement de $\tilde{f}'$

$$\frac{\tilde{f}'(x) - \tilde{f}'(0)}{x} = \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} ,$$

et en utilisant le développement limité

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2) ,$$

on obtient

$$\cos 3x - \cos x = 1 - \frac{9x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \circ(x^2) = -4x^2 + \circ(x^2) ,$$

d'où

$$\frac{\tilde{f}'(x) - \tilde{f}'(0)}{x} = -4 + \circ(1) \ .$$

Comme cette expression tend vers -4, on en déduit que $\tilde{f}'$ est dérivable à droite en zéro. Donc $\tilde{f}$ est deux fois dérivable à droite en zéro et $\tilde{f}''(0) = -4$

12) a) En prenant $x = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$. Donc $f(0) = 0$.

b) On démontre la propriété par récurrence.
En appliquant la relation fonctionnelle à $x/2$, on obtient

$$f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \ .$$

Donc, pour tout réel x, on a

$$2^{-1}f(x) = f(2^{-1}x) \ ,$$

et la propriété est vraie à l'ordre 1. Si on la suppose vraie à l'ordre n, on a alors

$$2^{-(n+1)}f(x) = 2^{-1}(2^{-n}f(x)) = 2^{-1}f(2^{-n}x) \ .$$

En appliquant la propriété à l'ordre 1 pour $2^{-n}x$, on a

$$2^{-1}f(2^{-n}x) = f(2^{-1}2^{-n}x) = f(2^{-(n+1)}x) \ ,$$

et donc finalement

$$2^{-(n+1)}f(x) = f(2^{-(n+1)}x) \ ,$$

ce qui est la relation à l'ordre $n+1$. La propriété est donc vraie pour tout entier n positif.

c) Si l'on fixe x non nul, et si l'on pose $y_n = 2^{-n}x$, la suite y_n tend vers $0 = f(0)$, et donc $f(y_n)/y_n$ est un taux d'accroissement. Alors, puisque f est dérivable en zéro,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{y_n} = f'(0) \ .$$

Mais d'autre part

$$\frac{f(y_n)}{y_n} = \frac{f(2^{-n}x)}{2^{-n}x} = \frac{2^{-n}f(x)}{2^{-n}x} = \frac{f(x)}{x} \ .$$

La suite $f(y_n)/y_n$ est donc constante. Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{y_n} = \frac{f(x)}{x} \ .$$

Donc

$$f'(0) = \frac{f(x)}{x} \ ,$$

Alors

$$f(x) = f'(0)x \ ,$$

ce qui reste vrai si x est nul. La fonction f est une application linéaire. Réciproquement, toute application linéaire vérifie les conditions imposées.

13) a) On étudie les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \tan x + \sin 2x - 2x\ ,$$

sur l'intervalle $[\,0, \pi/2\,[$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \tan^2 x + 2\cos 2x - 2 \\ &= \tan^2 x - 1 + 2\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{\tan^4 x - 2\tan^2 + 1}{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{(\tan^2 x - 1)^2}{1 + \tan^2 x}\ . \end{aligned}$$

La fonction f' est positive, et ne s'annule qu'en un point isolé, donc f est strictement croissante, et si $0 < x < \pi/2$,

$$0 = f(0) < f(x)\ ,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

b) On étudie les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}\ ,$$

sur l'intervalle $[\,0, \pi/2\,[$. On a

$$f'(x) = \tan^2 x - x^2\ .$$

Mais $\tan x \geq x$. Donc f' est positive et ne s'annule qu'en zéro. On conclut comme dans a).

c) On étudie les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = 2^{t-1}(x^t + a^t) - (x + a)^t$$

sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$. On a

$$f'(x) = t(2^{t-1}x^{t-1} - (x + a)^{t-1})\ .$$

Mais $t-1$ étant positif, la fonction $u \to u^{t-1}$ est croissante. Il en résulte que $2^{t-1}x^{t-1} - (x+a)^{t-1}$ est du signe de $2x - (x + a) = x - a$.
La fonction f est strictement croissante sur $[\,a, +\infty\,[$ et strictement décroissante sur $[\,0, a\,]$. Il en résulte que pour tout x positif

$$f(a) = 0 \leq f(x)\ ,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

14) L'équation équivaut à

$$(1 + x + x^2 + x^3)e^{-x} - 1 = 0\ .$$

On pose

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x} - 1\ ,$$

et l'on étudie cette fonction qui est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. On a

$$f'(x) = (1 + 2x + 3x^2)e^{-x} - (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x} = x(1 + 2x - x^2)e^{-x}\ .$$

La dérivée s'annule en 0, $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$, et l'on obtient le tableau de variation suivant :

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -\infty & & 1-\sqrt{2} & & 0 & & 1+\sqrt{2} & & +\infty \\
\hline
y' & & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
y & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & 0 & & & & -1
\end{array}$$

La fonction admet déjà une racine en zéro.

La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[\,1-\sqrt{2},0\,]$, et $f(0)$ est nul. On en déduit que $f(1-\sqrt{2})$ est strictement positif. Comme $f(x)$ est strictement croissante sur $]-\infty,1-\sqrt{2}\,]$, et tend vers $-\infty$ à $-\infty$, on en déduit que la fonction s'annule une fois et une seule dans $]-\infty,1-\sqrt{2}\,]$.

De même, la fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[\,0,1+\sqrt{2}\,]$, donc $f(1+\sqrt{2})$ est strictement positif. Comme $f(x)$ est strictement décroissante sur $[\,1+\sqrt{2},+\infty\,[$, et tend vers -1 à $+\infty$, on en déduit que la fonction s'annule une fois et une seule dans $]\,1+\sqrt{2},+\infty\,[$.

L'équation a exactement trois solutions.

15) a) Si l'on pose $f(x) = \arctan x$, on obtient une fonction définie et continue dans $[\,n,n+1\,]$, dérivable dans $]\,n,n+1\,[$. Sa dérivée vaut,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \,.$$

La fonction f' est décroissante, donc, dans l'intervalle $[\,n,n+1\,]$, on a

$$\frac{1}{1+(n+1)^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \,.$$

Il résulte alors des inégalités des accroissements finis que

$$\frac{1}{1+(n+1)^2} \leq \frac{\arctan(n+1)-\arctan n}{(n+1)-n} \leq \frac{1}{1+n^2} \,,$$

ce qui donne l'encadrement voulu.
On a donc pour tout entier positif k

$$\frac{1}{1+(k+1)^2} \leq \arctan(k+1)-\arctan k \leq \frac{1}{1+k^2} \,.$$

Si l'on somme ces inégalités, pour k variant de 0 à n, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+(k+1)^2} \leq \sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan k) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2} \,.$$

Mais,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+k^2} = S_{n+1}-1 \,,$$

et, en vertu du procédé télescopique

$$\sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan k)=\arctan(n+1)-\arctan 0\ .$$

Il en résulte que

$$S_{n+1}-1\leq\arctan(n+1)\leq S_n\ .$$

La suite S_n est croissante, puisque $S_{n+1}-S_n=1/(n^2+2n+2)$ est positif pour tout n. Par ailleurs, on tire de l'encadrement précédent

$$\arctan(n+1)\leq S_n\leq\arctan n+1\ ,$$

Mais $\arctan n+1$ est majorée par $\pi/2+1$. Il en est donc de même pour S_n, et il en résulte qu'elle converge. Alors en passant à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient

$$\frac{\pi}{2}\leq S\leq\frac{\pi}{2}+1\ .$$

16) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(t)=\arctan t\ .$$

Cette fonction est dérivable, et sa dérivée vérifie

$$0<f'(t)<1\ .$$

Donc il résulte de l'inégalité des accroissements finis que, si $x\neq y$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<1\ .$$

On en déduit donc

$$|\arctan x-\arctan y|<|x-y|\ .$$

Si $x=y$ on a alors égalité et c'est le seul cas possible pour qu'il en soit ainsi.

17) Soit $f(t)=\operatorname{th} t$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[\,0,x\,]$, dérivable sur $]\,0,x\,[$. Sur cet intervalle, sa dérivée vaut $1/\operatorname{ch}^2 t$. C'est une fonction décroissante et donc

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\leq\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\leq 1\ .$$

Il résulte alors des inégalités des accroissements finis que, si $x>0$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\leq\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq 1\ ,$$

soit

$$\frac{x}{\operatorname{ch}^2 x}\leq\operatorname{th} x\leq x\ ,$$

ce qui reste vrai si x est nul.

Quand x tend vers zéro, $\operatorname{th} x/x$ est comprise entre $1/\operatorname{ch}^2 x$ et 1. Comme ces deux expressions tendent vers 1, il résulte du théorème d'encadrement que $\operatorname{th} x/x$ tend vers 1, et donc que $\operatorname{th} x \sim x$ en zéro.

18) Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \ln(1+t^2)$. On a

$$f'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \; .$$

Mais

$$1 - \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(t-1)^2}{1+t^2} \geq 0 \; ,$$

et

$$1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(t+1)^2}{1+t^2} \geq 0 \; ,$$

et donc pour tout t réel, $-1 \leq f'(t) \leq 1$, c'est-à-dire $|f'(t)| \leq 1$. Il résulte alors de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout x réel,

$$|f(x) - f(0)| \leq |x| \; ,$$

d'où, puisque $f(x) \geq 0$

$$\ln(1+x^2) \leq |x| \; .$$

19) En écrivant le théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[\,a, b\,]$, il existe t dans $]\,a, b\,[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(t) \; .$$

Donc

$$(b-a)|f'(t)| = |f(b) - f(a)| \leq |f(b)| + |f(a)| \; .$$

Mais $|f(b)|$ et $|f(a)|$ se majorent par le maximum de $|f|$, et $|f'(t)|$ se minore par le minimum de $|f'|$ qui existent tous les deux puisque ces fonctions sont continues sur $[\,a, b\,]$. On en déduit donc

$$(b-a) \min_{a \leq t \leq b} |f'(t)| \leq 2 \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \; .$$

20) Posons $f(x) = \sin x$. On a donc

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(5)}(x) = \cos x \; .$$

Soit $x > 0$. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Il existe ξ dans l'intervalle $]\,0, x\,[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(\xi) \; ,$$

donc

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos \xi \; .$$

mais $\cos \xi \leq 1$, donc

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \; .$$

En appliquant cette fois la formule de Taylor à l'ordre 4, Il existe ξ' dans l'intervalle $]\,0,x\,[$, tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0) + \frac{x^4}{24}f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{120}f^{(5)}(\xi')\ ,$$

donc

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos\xi'\ .$$

mais $\cos\xi' \leq 1$,donc

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\ .$$

On a donc bien l'encadrement

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\ ,$$

ce qui reste vrai si $x = 0$.

On en déduit

$$0 \leq \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{x^5}{120}\ .$$

En particulier, si $x = 1/2$,

$$0 \leq \sin\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\right) \leq \frac{1}{3840} \leq \frac{3}{11520} \leq 3\cdot 10^{-4}\ .$$

On en déduit que $23/48$ est une valeur approchée par défaut de $\sin(1/2)$ à $3\cdot 10^{-4}$.

21) a) En partant de $f'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x$, on obtient

$$f''(x) = -2\operatorname{th} x(1 - \operatorname{th}^2 x) = -2(\operatorname{th} x - \operatorname{th}^3 x)\ ,$$

puis

$$f'''(x) = -2(1 - 3\operatorname{th}^2 x)(1 - \operatorname{th}^2 x) = -2(1 - 4\operatorname{th}^2 x + 3\operatorname{th}^4 x)\ .$$

En particulier

$$1 - f'(x) = \operatorname{th}^2 x \geq 0\ ,$$

et

$$2 + f'''(x) = 2(4\operatorname{th}^2 x - 3\operatorname{th}^4 x) = 2\operatorname{th}^2 x(4 - 3\operatorname{th}^2 x)\ ,$$

et en majorant $\operatorname{th}^2 x$ par 1, on obtient $4 - 3\operatorname{th}^2 x \geq 1$, et donc

$$2 + f'''(x) \geq 2\operatorname{th}^2 x \geq 0\ .$$

b) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 0, il existe c dans $[\,0,x\,]$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(c) = xf'(c)\ ,$$

et puisque $f'(c)$ se majore par 1,

$$f(x) \leq x\ .$$

b) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe c' dans $[\,0,x\,]$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(c') = x + \frac{x^3}{6}f'''(c'),$$

et puisque $f'''(c')$ se minore par -2,

$$f(x) \geq x - \frac{x^3}{3} .$$

c) On a donc

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3} .$$

En particulier, si $x = 1/4$

$$0 \leq \frac{1}{4} - f\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{3 \cdot 4^3} = \frac{1}{3 \cdot 64} = \frac{6}{18 \cdot 64} = \frac{6}{1152} \leq 6 \cdot 10^{-3} .$$

22) a) Il existe c dans l'intervalle $[x, x+\alpha]$ tel que

$$f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \frac{\alpha^2}{2} f''(c) .$$

Donc

$$\alpha f'(x) = f(x+\alpha) - f(x) - \frac{\alpha^2}{2} f''(c) .$$

Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\alpha |f'(x)| = \left| f(x+\alpha) - f(x) - \frac{\alpha^2}{2} f''(c) \right| \leq |f(x+\alpha)| + |f(x)| + \frac{\alpha^2}{2} |f''(c)| .$$

En majorant $|f(x+\alpha)|$ et $|f(x)|$ par A, et $|f''(c)|$ par B, on obtient

$$\alpha |f'(x)| \leq 2A + B\frac{\alpha^2}{2} .$$

Et finalement

$$|f'(x)| \leq \frac{2A}{\alpha} + \frac{\alpha B}{2} .$$

b) Supposons tout d'abord B non nul. Si l'on pose

$$h(\alpha) = \frac{2A}{\alpha} + \frac{\alpha B}{2} ,$$

on a

$$h'(\alpha) = -\frac{2A}{\alpha^2} + \frac{B}{2} = \frac{\alpha^2 B - 4A}{2\alpha^2} .$$

La dérivée est donc sur $]0, +\infty[$ du signe de $\alpha - 2\sqrt{A/B}$. La fonction h admet un minimum en $\alpha = 2\sqrt{A/B}$, et l'on a

$$h\left(2\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = 2\sqrt{AB} .$$

On obtient donc pour tout $x > 0$,

$$|f'(x)| \leq h\left(2\sqrt{\frac{A}{B}}\right) ,$$

soit

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB} .$$

Si B est nul, cela signifie que f'' est nulle, donc que f est une fonction polynôme de degré 1 au plus. Mais une telle fonction n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$ si elle n'est pas constante. Donc f' est nulle et l'on a bien dans ce cas aussi

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB} .$$

23) a) En posant $f(x) = \cos x$, on a

$$f'(x) = -\sin x \ , \ f''(x) = -\cos x \ , \ f^{(3)}(x) = \sin x \ , \ f^{(4)}(x) = \cos x \ .$$

Soit x un réel positif. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, il existe ξ dans $]0,x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 .$$

Donc

$$\cos x = 1 - \frac{\cos\xi}{2}x^2 .$$

Et comme $\cos\xi \leq 1$, on en déduit

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} .$$

Puis en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 3, il existe ξ' dans $]0,x[$ tel que ,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi')}{4!}x^4 .$$

Donc

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos\xi'}{24}x^4 .$$

Et comme $\cos\xi' \leq 1$, on en déduit encore

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} .$$

On a donc bien

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} ,$$

ce qui, en raison de la parité des fonctions, reste vrai si x est négatif.

b) En multipliant par la quantité conjuguée,

$$1 - \sqrt{1-x} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} .$$

Mais, si x appartient à l'intervalle $[0,1]$, il en est de même de $\sqrt{1-x}$ et

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} \geq \frac{1}{2} .$$

D'où

$$1 - \sqrt{1-x} \geq \frac{x}{2} ,$$

et

$$\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2} .$$

Remarque : on peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis.

c) Posons $g(u)=\sqrt{1-u}$, on a

$$g'(u)=-\frac{1}{2}(1-u)^{-1/2} \quad \text{et} \quad g''(u)=-\frac{1}{4}(1-u)^{-3/2} .$$

Soit u dans l'intervalle $]\,0,\pi^2/16\,]$. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, il existe ξ dans $]\,0,u\,[$ tel que

$$g(u)=g(0)+ug'(0)+\frac{g''(\xi)}{2}u^2 ,$$

soit

$$\sqrt{1-u}=1-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}(1-\xi)^{-3/2} .$$

Mais

$$(1-\xi)^{3/2}\geq\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{3/2} ,$$

donc

$$(1-\xi)^{-3/2}\leq\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2} ,$$

et

$$\sqrt{1-u}\geq 1-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2} ,$$

ce qui reste vrai si $u=0$. Remplaçons alors u par x^2, on obtient donc que, pour tout x de l'intervalle $[\,0,\pi/4\,]$,

$$\sqrt{1-x^2}\geq 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2} .$$

d) Si x appartient à l'intervalle $[\,0,\pi/4\,]$, il est aussi inclus dans $[\,0,1\,]$, et il résulte de b) et c) que

$$1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2}\leq\sqrt{1-x^2}\leq 1-\frac{x^2}{2} .$$

Soit

$$-1+\frac{x^2}{2}\leq-\sqrt{1-x^2}\leq-1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2} .$$

En additionnant membre à membre ces inégalités et celles de a), on trouve alors

$$0\leq\cos x-\sqrt{1-x^2}\leq\frac{1}{24}\left(1+3\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2}\right)x^4 .$$

La constante M est donc définie par

$$M=\frac{1}{24}\left(1+3\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2}\right) .$$

24) a) Calculons les premières dérivées :

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1} ,\ f''(x)=(-1)(1+x)^{-2} ,\ f^{(3)}(x)=(-1)(-2)(1+x)^{(-3)} .$$

On voit apparaître la relation

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!(1+x)^{-n} \ ,$$

qui est vérifiée pour les trois premières valeurs de n. On montre, par récurrence, qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$.
Si on la suppose vraie à l'ordre n, on a, en dérivant

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1} \ ,$$

et la relation est vraie à l'ordre $n+1$, donc quel que soit $n \geq 1$.

b) Ecrivons la formule de Taylor : il existe ξ_n dans $]\,0, 1/2\,[$ tel que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \ .$$

Or, $f(0) = 0$, et si $k \geq 1$,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)}(k-1)! \ ,$$

donc

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ ,$$

et

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n n!(1+\xi_n)^{-n-1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}} \ .$$

Donc, en remplaçant, on obtient

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = s_n + \frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \ .$$

On en déduit donc

$$s_n = \ln\frac{3}{2} - \frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}\,\frac{1}{2^{n+1}} \ .$$

Mais, en minorant ξ_n par zéro au dénominateur, on obtient

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}\,\frac{1}{2^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \ ,$$

et comme le membre de droite tend vers zéro, il en résulte que s_n tend vers $\ln(3/2)$.

25) a) La propriété se démontre par récurrence. Elle est évidente si $n = 0$. Supposons la vraie à l'ordre n. En calculant la dérivée de

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(x+1)^{-n-1/2} \ ,$$

on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-n-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-n-3/2} \ .$$

Mais

$$-\,n - \frac{1}{2} = -\frac{2n+1}{2} = -\frac{(2n+1)(2n)}{4n} \ .$$

Alors

$$f^{(n+1)}(x) = -(-1)^n \frac{(2n+1)(2n)(2n)!}{2^{2n+2}(n+1)n!}(x+1)^{-n-3/2} = (-1)^{n+1}\frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}(n+1)!}(x+1)^{-n-3/2} ,$$

ce qui est la formule à l'ordre $n+1$. Le résultat est donc vrai pour tout entier n.

b) On a

$$(2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi} ,$$

et

$$(n!)^2 \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2n\pi .$$

Alors

$$u_n \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}}{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2n\pi} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} .$$

c) En utilisant la formule de Taylor, il existe ξ_n dans l'intervalle $]\,0, x\,[$, donc dans l'intervalle $[\,0, 1\,]$, tel que

$$f(x) = S_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1} .$$

Il en résulte que

$$|f(x) - S_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = u_{n+1}\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+3/2}}x^{n+1} .$$

Alors, en majorant x par 1, et en minorant ξ_n par 0,

$$|f(x) - S_n(x)| \leq u_n .$$

Mais d'après l'équivalent obtenu en b), la suite u_n tend vers zéro. Il résulte alors de l'inégalité ci-dessus que $S_n(x)$ tend vers $f(x)$.

26) a) Lorsque x est fixé, et lorsque t tend vers zéro, on a

$$\sin xt^2 \sim xt^2 ,$$

donc

$$\phi_x(t) \sim xt .$$

Il en résulte que $\phi_x(t)$ tend vers zéro, lorsque x tend vers zéro. la fonction se prolonge par continuité en zéro, et l'on peut donc définir une fonction f en posant

$$f(x) = \int_0^1 \phi_x(t)\, dt .$$

b) En partant de l'inégalité

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v| ,$$

vraie quels que soient les réels u et v, qui résulte de l'inégalité de Taylor, on a donc

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= \left|\int_0^1 \frac{\sin xt^2}{t}\,dt - \frac{\sin yt^2}{t}\,dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |\sin xt^2 - \sin yt^2|\,\frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^1 |xt^2 - yt^2|\,\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Or la dernière intégrale se calcule et l'on obtient

$$\int_0^1 |xt^2 - yt^2|\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}|x-y|\ ,$$

d'où l'inégalité désirée.

c) En utilisant la formule de Taylor, dans l'intervalle $[\,u,v\,]$, pour la fonction sinus, il existe ξ dans $]\,u,v\,[$ tel que

$$\sin u = \sin v + (u-v)\cos v + \frac{(u-v)^2}{2}(-\sin\xi)\ .$$

Donc

$$|\sin u - \sin v - (u-v)\cos v| \leq \frac{(u-v)^2}{2}\ .$$

On en déduit en particulier

$$|\sin yt^2 - \sin xt^2 - (yt^2 - xt^2)\cos xt^2| \leq \frac{(yt^2-xt^2)^2}{2}\ .$$

Puis, en divisant par $y-x$,

$$\left|\frac{\sin yt^2 - \sin xt^2}{y-x} - t^2\cos xt^2\right| \leq \frac{1}{2}|y-x|\,t^4\ .$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - \int_0^1 t\cos xt^2\,dt\right| &= \left|\int_0^1 \left[\frac{\sin yt^2 - \sin xt^2}{y-x} - t^2\cos xt^2\right]\frac{dt}{t}\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|\frac{\sin yt^2 - \sin xt^2}{y-x} - t^2\cos xt^2\right|\frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^1 |x-y|\frac{t^3}{2}\,dt\ .
\end{aligned}$$

Or la dernière intégrale se calcule. Elle vaut $\frac{1}{8}|x-y|$ donc

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - \int_0^1 t\cos xt^2\,dt\right| \leq \frac{1}{8}|x-y|\ .$$

Il en résulte que, lorsque y tend vers x, le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ tend vers $\int\limits_0^1 t\cos xt^2\,dt$. La fonction f est donc dérivable en tout point, et

$$f'(x) = \int\limits_0^1 t\cos xt^2\,dt\ .$$

Or cette intégrale se calcule :
a) si x est nul

$$f'(0) = \int\limits_0^1 t dt = \frac{1}{2}\ .$$

b) si x est non nul

$$f'(x) = \int\limits_0^1 t\cos xt^2\,dt = \left[\frac{1}{2x}\sin xt^2\right]_0^1 = \frac{\sin x}{2x}\ .$$

La fonction f' est continue sur $\mathbf{R}^*$. Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)\ .$$

Donc f' est également continue en zéro. C'est une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

27) a) Soit $f(t) = \arctan t$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[\,0,x\,]$, dérivable sur $]\,0,x\,[$. Sur cet intervalle, sa dérivée vaut $1/(1+t^2)$. C'est une fonction décroissante et donc

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1\ .$$

Il résulte alors des inégalités des accroissements finis que, si $x > 0$

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq 1\ ,$$

soit

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x\ ,$$

ce qui reste vrai si x est nul.

b) D'après ce qui précède

$$0 \leq \arctan\frac{1}{5} \leq \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad 0 \leq \arctan\frac{1}{239} \leq \frac{1}{239}\ ,$$

donc

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \leq \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}\ ,$$

et

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \geq -\frac{1}{239} > -\frac{\pi}{2}\ .$$

Il en résulte que A se trouve dans l'intervalle $]\,-\pi/2,\pi/2\,[$.

Soit $a = \arctan(1/5)$, donc $\tan a = 1/5$. Alors

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \frac{\dfrac{2}{5}}{1-\dfrac{1}{25}} = \frac{5}{12} \ .$$

Puis

$$\tan 4a = \frac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a} = \frac{\dfrac{10}{12}}{1-\dfrac{25}{144}} = \frac{120}{119} \ .$$

Si $b = \arctan(1/239)$, on a $\tan b = 1/239$ alors

$$\begin{aligned}
\tan A &= \frac{\tan 4a - \tan b}{1+\tan 4a\ \tan b}\\
&= \frac{\dfrac{120}{119} - \dfrac{1}{239}}{1+\dfrac{120}{119}\,\dfrac{1}{239}}\\
&= \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120}\\
&= \frac{119\cdot 239 + 239 - 119}{119\cdot 239 + 120}\\
&= \frac{119\cdot 239 + 120}{119\cdot 239 + 120} = 1 \ .
\end{aligned}$$

Donc

$$\tan A = \tan\frac{\pi}{4} \ .$$

Mais comme A appartient à l'intervalle $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$, on en déduit que $A = \pi/4$.

28) La formule se démontre par récurrence. Si $n = 0$, elle devient

$$\int_a^b f'(t) = f(b) - f(a) \ ,$$

ce qui est vrai. Supposons le résultat vrai à l'ordre n, donc

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \ .$$

et intégrons par partie l'intégrale figurant dans le membre de droite. Posons

$$u(t) = f^{(n+1)}(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!} \ .$$

On a alors

$$u'(t) = f^{(n+2)}(t) \quad \text{et} \quad v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \ .
\end{aligned}$$

Alors, en remplaçant dans la formule à l'ordre n, on obtient

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \ ,$$

ce qui est la formule à l'ordre $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$

29) La fonction est définie sur $\mathbf{R} - \{0,2\}$. On a également

$$f(2-x) = \arctan \frac{2(1-(2-x))}{2(2-x)-(2-x)^2} = \arctan \frac{2(x-1)}{2x-x^2} \ ,$$

et comme la fonction arctangente est impaire, on a donc

$$f(2-x) = -f(x) \ .$$

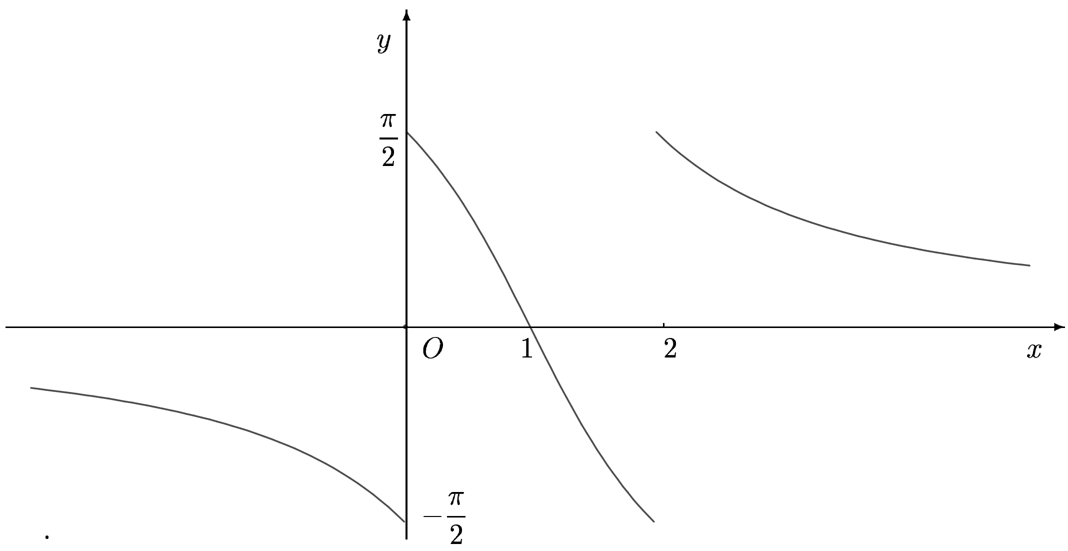
La courbe représentative est symétrique par rapport au point de coordonnées (1,0). Calculons la dérivée. On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\frac{(2x-x^2)(-1)-(1-x)(2-2x)}{(2x-x^2)^2} \frac{1}{1+\left(\dfrac{2(1-x)}{2x-x^2}\right)^2} \\
&= -2\frac{x^2-2x+2}{(2x-x^2)^2+4(1-x)^2} \ .
\end{aligned}$$

La fonction f' est donc négative. On forme alors le tableau de variation suivant :

x	1		2			$+\infty$
y'	-2	$-$	-1		$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

On remarque que $f'(x)$ a pour limite -1 quand x tend vers 2. Cela donne pour la courbe des demi-tangentes à gauche et à droite du point de discontinuité.
On a alors la courbe suivante :



On peut simplifier la dérivée, en remarquant que

$$(2x - x^2)^2 + 4(1 - x)^2 = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = (x^2 - 2x + 2)^2 .$$

donc

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2 - 2x + 2} = \frac{-2}{(x-1)^2 + 1} .$$

Alors, dans les trois intervalles où f est continue, elle est de la forme

$$f(x) = -2\arctan(x - 1) + C ,$$

ou C est une constante qu'il reste à déterminer.

Tout d'abord, sur l'intervalle $]\,0, 2\,[$, puisque

$$f(1) = 0 = C ,$$

la constante est nulle et

$$f(x) = -2\arctan(x - 1) .$$

Ensuite, sur l'intervalle $]\,2, +\infty\,[$, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = -\pi + C ,$$

la constante vaut π et

$$f(x) = \pi - 2\arctan(x - 1) .$$

Enfin, sur l'intervalle $]\,-\infty, 0\,[$, puisque

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \pi + C ,$$

la constante vaut $-\pi$ et

$$f(x) = -\pi - 2\arctan(x - 1) .$$

30) La fonction est définie pour les valeurs de x telles que

$$-1 \leq 3x - 4x^3 \leq 1 \;,$$

c'est-à-dire

$$1 - (3x - 4x^3)^2 \geq 0 \;.$$

Or

$$1 - (3x - 4x^3)^2 = (1 - 3x + 4x^3)(1 + 3x - 4x^3) = (1 - x^2)(4x^2 - 1)^2 \;.$$

Cette expression est positive si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-1, 1]$ qui est donc le domaine de définition de f, et la fonction est continue sur ce domaine. De plus la fonction est impaire.

La fonction est dérivable si

$$-1 < 3x - 4x^3 < 1,$$

donc, d'après le calcul précédent, sur $]-1, 1[- \{\pm 1/2\}$.

On a alors

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}} \\ &= \frac{3 - 12x^2}{|1 - 4x^2|\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{1 - 4x^2}{|1 - 4x^2|}\frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

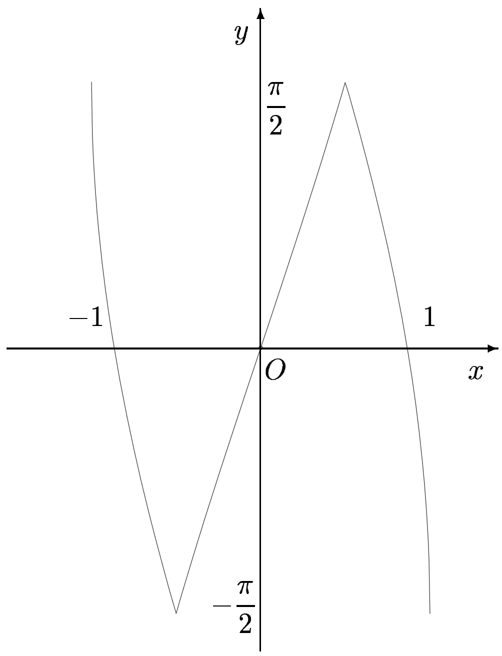
donc

$$y' = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } 1 - 4x^2 > 0 \\ -\dfrac{3}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } 1 - 4x^2 < 0 \end{cases}$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$			1
y'	3	$+$	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$		$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

On remarquera qu'en $1/2$ la fonction n'est pas dérivable, mais la courbe admet des demi-tangentes à gauche et à droite. On a le graphe suivant :



Sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, on a

$$f(x) = 3\arcsin x + C\ ,$$

mais

$$f(0) = 0 = C\ .$$

La constante est nulle et

$$f(x) = 3\arcsin x\ .$$

Ensuite, sur l'intervalle $[1/2, 1]$,

$$f(x) = -3\arcsin x + C\ ,$$

mais

$$f(1) = -\frac{\pi}{2} = -3\frac{\pi}{2} + C\ ,$$

la constante vaut π et

$$f(x) = \pi - 3\arcsin x\ .$$

Enfin, sur l'intervalle $[-1, -1/2]$,

$$f(x) = -3\arcsin x + C\ ,$$

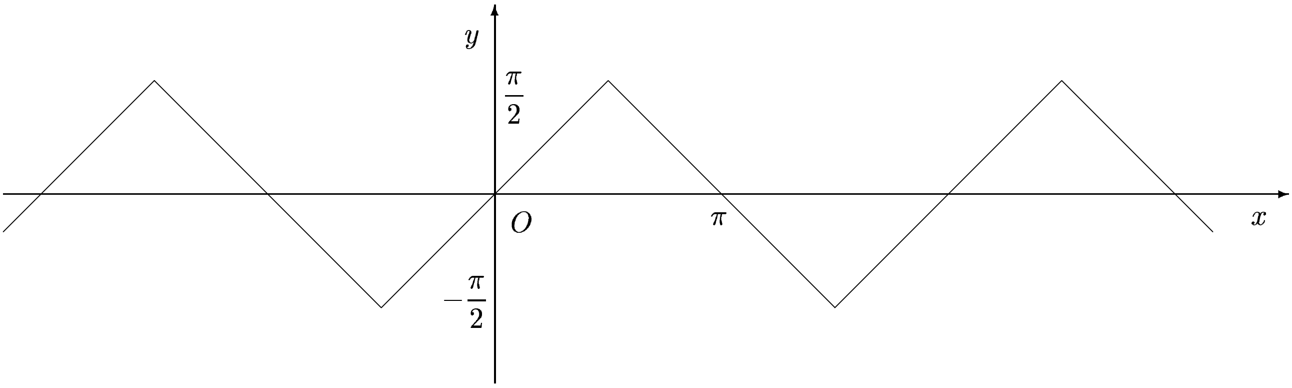
mais

$$f(-1) = \frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{2} + C\ ,$$

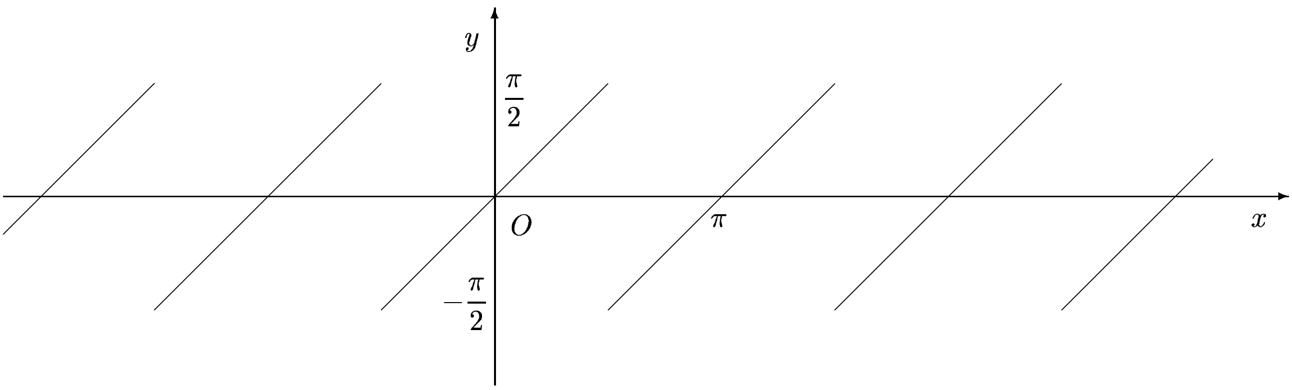
la constante vaut $-\pi$ et

$$f(x) = -\pi - 3\arcsin x\ .$$

31) La fonction f est impaire et $2\pi-$périodique. De plus $f(\pi - x) = f(x)$. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi/2]$ et d'effectuer une symétrie par rapport au point $(\pi/2, 0)$ puis une autre par rapport à l'origine et de compléter par périodicité. Mais sur $[0, \pi/2]$ on a $f(x) = x$. On a donc le graphe suivant :



La fonction g est impaire, non définie aux points $\pi/2 + k\pi$ où k est entier, et $\pi-$périodique. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi/2[$ et d'effectuer une symétrie par rapport à l'origine et de compléter par périodicité. Mais sur $[0, \pi/2[$ on a $g(x) = x$. On a donc le graphe suivant :



32) a) Cherchons tout d'abord le domaine de définition de la fonction. Comme $\arcsin x$ est définie sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire lorsque $1 - x^2 \geq 0$, le nombre $f(x)$ existe si et seulement si

$$1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 \geq 0 \ .$$

Mais

$$1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \ .$$

Donc f est définie sur $\mathbf{R}$ toute entier. De plus cette expression s'annule uniquement en $+1$ et -1.

La fonction f est continue et impaire sur $\mathbf{R}$ et dérivable sauf en $+1$ et -1.

On a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \left|\frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}\right| \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \frac{2}{1+x^2} \ .$$

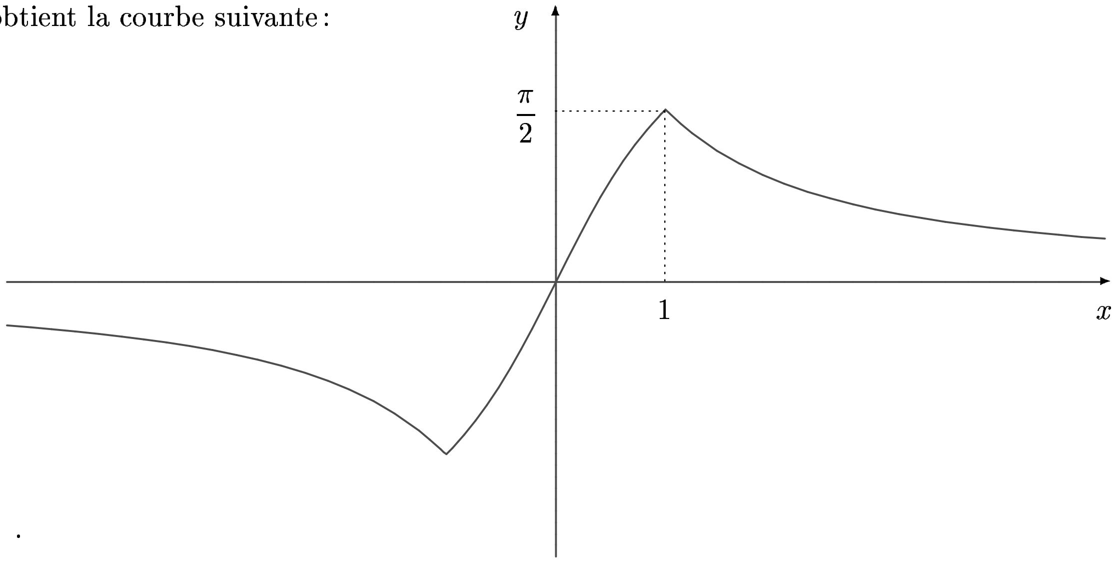
Cette fonction est du signe de $1-x^2$ et possède une limite à gauche et à droite en 1 et -1.

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1 \ .$$

On a facilement le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	1 ‖ -1	$-$	
y			$\frac{\pi}{2}$		
	0	↗		↘	0

On obtient la courbe suivante :



b) Dans l'intervalle $]-1,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \ .$$

Donc

$$f(x) = 2\arctan x + C \ .$$

Mais $f(0) = C = 0$. Donc

$$f(x) = 2\arctan x \ .$$

Dans l'intervalle $]1,+\infty[$

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \ .$$

Donc

$$f(x) = -2\arctan x + C_1 \ .$$

En faisant tendre x vers l'infini, on obtient

$$0 = -\pi + C_1 \ .$$

On a un résultat analogue par symétrie dans $]-\infty, -1[$. Finalement

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan x - \pi \text{ si } & x \in]-\infty, -1] \\ \arctan x \text{ si } & x \in [-1, 1] \\ -2\arctan x + \pi \text{ si } & x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

33) Cherchons le domaine de définition de la fonction. La fonction arccosinus n'étant définie que sur $[-1, 1]$ il faut donc

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \ ,$$

ou encore

$$1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 \geq 0 \ .$$

Mais

$$1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

est toujours positive. Donc f est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, et c'est une fonction paire. La fonction est continue sur $\mathbf{R}$. Elle est dérivable sauf aux points x tels que $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \pm 1$, c'est-à-dire si $x = 0$. Alors

$$f'(x) = -\frac{-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \ .$$

mais, d'après un calcul fait plus haut

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{2|x|}{1+x^2} \ ,$$

d'où

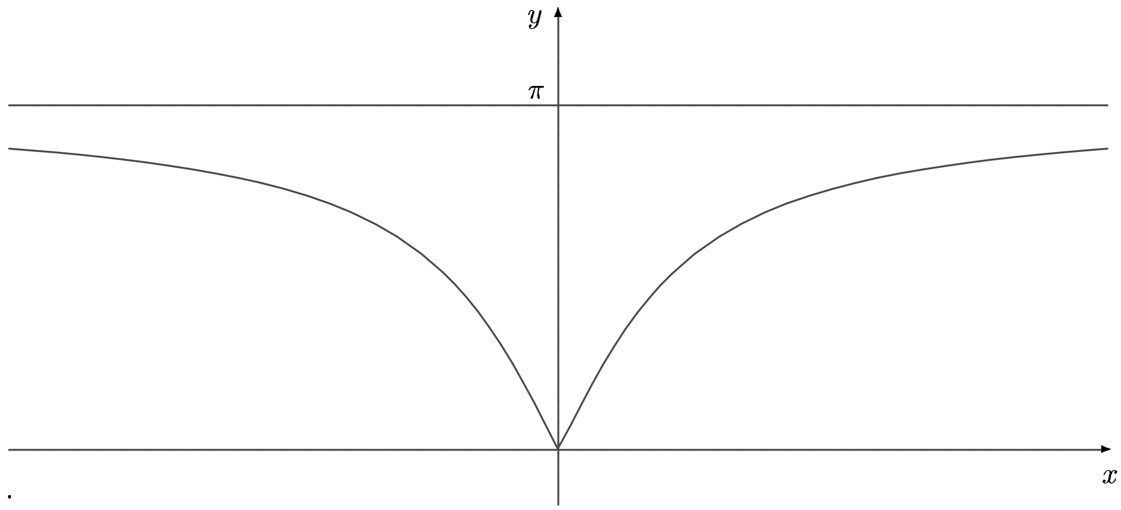
$$f'(x) = \frac{x}{|x|} \, \frac{2}{1+x^2} \ .$$

La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$.
Elle varie de $f(0) = \arccos 1 = 0$ à $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$. De plus

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{1+x^2} = 2 \ .$$

La courbe admet en zéro une demi-tangente à droite de pente 2.

On obtient le graphe suivant :



On remarque que si l'on pose $g(x) = 2\arctan x$, on a, sur $]\,0, +\infty\,[$

$$f'(x) = g'(x)\ .$$

Donc

$$f(x) = g(x) + C\ ,$$

mais en faisant tendre x vers 0, on obtient $C = 0$. Alors, puisque f est paire, et g impaire, on, pour tout x réel

$$f(x) = |\arctan x|\ .$$

34) La fonction est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Sa dérivée vaut

$$y' = 1 + 2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{3e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\ .$$

Elle s'annule pour $x = -\frac{1}{2}\ln 3$, et la courbe possède un minimum en ce point :

$$\alpha = f\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ \ln 3\ .$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{\ln 3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	α	$\nearrow$	$+\infty$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on écrit

$$y = x + 2\ln\left[e^x\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right] = 3x - 2\ln 2 + 2\ln(1+e^{-2x}) \ ,$$

et $\ln(1+e^{-2x})$ tend vers zéro. La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = 3x - 2\ln 2 \ ,$$

et elle se trouve située au-dessus de cette asymptote car $\ln(1+e^{-2x})$ est positif.

Lorsque x tend vers $-\infty$, on écrit

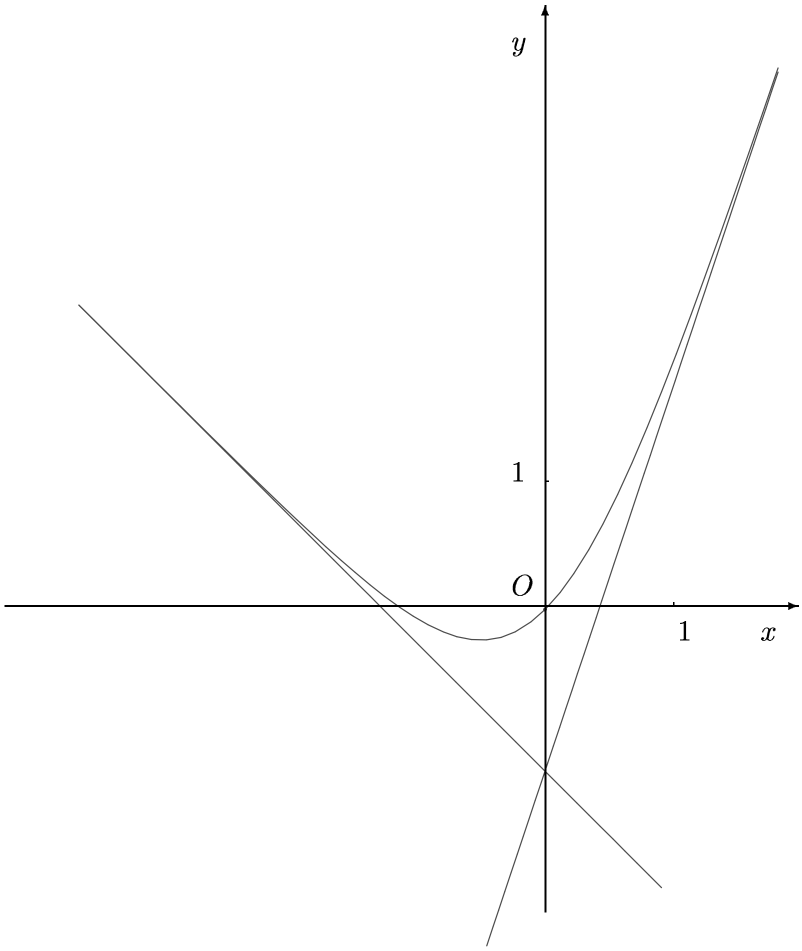
$$y = x + 2\ln\left[e^{-x}\left(\frac{1+e^{2x}}{2}\right)\right] = -x - 2\ln 2 + 2\ln(1+e^{2x}) \ .$$

et $\ln(1+e^{2x})$ tend vers zéro.La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = -x - 2\ln 2 \ ,$$

et elle se trouve située au-dessus de cette asymptote car $\ln(1+e^{2x})$ est positif.

On remarque de plus que la courbe passe par l'origine. On a le graphe suivant :



35). Soit g l'application qui à x associe e^{x^2}, et G une primitive de g. On a donc

$$f(x) = G(1-x) - G(x) \ ,$$

et en dérivant cette expression

$$f'(x) = -G'(1-x) - G'(x) = -g(1-x) - g(x) = -e^{(1-x)^2} - e^{x^2} \ .$$

Donc f' est strictement négative, puisqu'elle est la somme de deux nombres strictement négatifs. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

On remarque que

$$f(1-x) = \int_{1-x}^{x} e^{t^2}\,dt = -\int_{x}^{1-x} e^{t^2}\,dt = -f(x) \ .$$

La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport au point de coordonnées (1/2,0), et il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $[\,1/2, +\infty\,[$.

Etudions le comportement de la courbe lorsque x tend vers $+\infty$. En remarquant que si x est supérieur à $1/2$, on a $1-x < x$, et en utilisant la minoration

$$e^{t^2} \geq t^2 \ ,$$

on en déduit

$$-f(x) = \int_{1-x}^{x} e^{t^2}\,dt \geq \int_{1-x}^{x} t^2\,dt\ ,$$

or

$$\int_{1-x}^{x} t^2\,dt = \frac{1}{3}(x^3 + (x-1)^3)\ ,$$

d'où

$$f(x) \leq -\frac{1}{3}(x^3 + (x-1)^3)\ .$$

On en déduit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et, puisque,

$$\frac{f(x)}{x} \leq -\frac{x^3 + (x-1)^3}{3x}\ ,$$

que $f(x)/x$ tend également vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Quand x tend vers $+\infty$, la courbe admet donc une branche parabolique dans la direction des y négatifs, et par symétrie, elle admet une branche parabolique dans la direction des y positifs, lorsque x tend vers $-\infty$.

Pour étudier la concavité, on étudie le signe de $f''(x)$. On a, pour $x \geq 1/2$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(x-1)e^{(x-1)^2} - 2xe^{x^2} \\ &= -2xe^{x^2}\left(\frac{x-1}{x}e^{(x-1)^2-x^2} + 1\right) \\ &= -2xe^{x^2}\left(\frac{x-1}{x}e^{-2x+1} + 1\right)\ . \end{aligned}$$

Pour étudier ce signe, on étudie les variations de la fonctions h définie par

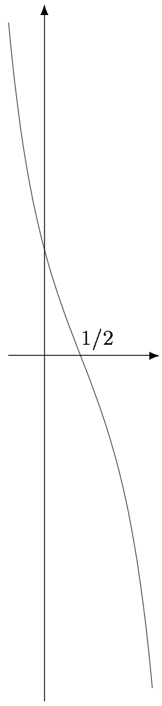
$$h(x) = \frac{x-1}{x}e^{-2x+1} + 1\ .$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{1}{x^2} - 2\frac{x-1}{x}\right)e^{-2x+1} \\ &= \frac{-2x^2 + 2x + 1}{x^2}e^{-2x+1}\ . \end{aligned}$$

Le trinôme $-2x^2 + 2x + 1$ a deux racines réelles $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Il est positif sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}]$ et négatif sur $[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$. Par ailleurs

$$h(1/2) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 1\ .$$



Donc, sur l'intervalle $[1/2, (1+\sqrt{3})/2]$, h est croissante et varie de 0 à une valeur $\alpha = h(\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ strictement positive. Puis sur $[(1+\sqrt{3})/2, +\infty[$, h est strictement décroissante et varie de α à 1. Il en résulte que h est positive et ne s'annule qu'en 1/2. On en déduit donc que f'' est négative et ne s'annule qu'en 1/2.
Donc f est concave sur $[1/2, +\infty[$, et par symétrie convexe sur $]-\infty, 1/2]$, et admet pour point d'inflexion le point de coordonnées (1/2,0).

36) a) On part de la relation $\tan(\arctan x) = x$ pour tout x réel. On a tout d'abord

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2} \ ,$$

mais $\arctan x$ appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$, et donc $\cos(\arctan x)$ est positif. Alors

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

b) On écrit

$$\sin(\arctan x) = (\cos(\arctan x))(\tan(\arctan x)) \ ,$$

et en utilisant a), on obtient

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

c) On part de la relation $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout x de l'intervalle $[-1, 1]$. On a tout d'abord

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \ ,$$

mais $\arcsin x$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$, et donc $\cos(\arcsin x)$ est positif. Alors

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \ .$$

d) On part de la relation $\cos(\arccos x) = x$ pour tout x de l'intervalle $[0, \pi]$. On a tout d'abord

$$\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2 \ ,$$

mais $\arccos x$ appartient à $[0, \pi]$, et donc $\sin(\arccos x)$ est positif. Alors

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \;.$$

e) En utilisant c)

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;.$$

f) En utilisant d)

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \;.$$

37) a) Remarquons tout d'abord qu'une solution de l'équation est nécessairement positive, car $\arctan x$ a le même signe que x. Transformons l'équation par implications successives.

$$\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

En prenant la tangente des deux membres, cela implique

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan x) = 1 \;,$$

d'où, en utilisant la formule donnant la tangente d'une somme

$$\frac{2x + x}{1 - 2x \cdot x} = 1 \;.$$

Finalement, on obtient l'équation

$$2x^2 + 3x - 1 = 0 \;,$$

qui possède une solution unique positive

$$x_0 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \;.$$

On peut seulement dire que si l'équation de départ possède une solution c'est x_0. Pour montrer que x_0 est effectivement solution de cette équation, on peut étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(2x) + \arctan x - \frac{\pi}{4} \;.$$

Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{1}{1+x^2} > 0 \;.$$

Donc f une fonction strictement croissante. On a

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} < 0 \;,$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} > 0 \;.$$

Il en résulte que f s'annule une fois et une seule. Donc sa racine est x_0.

b) Transformons l'équation par implications successives.

$$\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}\ ,$$

équivaut à

$$\arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

En prenant le sinus des deux membres, cela implique

$$x\sqrt{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \cos(\arcsin x)\ .$$

Alors en utilisant l'exercice précédent, on trouve

$$x\sqrt{3} = \sqrt{1-x^2}\ ,$$

qui implique

$$4x^2 - 1 = 0\ .$$

Cette équation possède deux solutions $x_1 = 1/2$ et $x_2 = -1/2$.
Les solutions de l'équation de départ, si elles existent, sont dans l'ensemble $\{x_1\,x_2\}$. Cherchons lesquelles se ses solutions conviennent. On constate que

$$\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}\ ,$$

Donc x_1 convient. Par contre x_2 ne convient pas, car $\arcsin x$ et x étant de même signe le nombre $-1/2$ donne une valeur négative.

c) L'équation

$$(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4\ ,$$

équivaut au système

$$\begin{cases} U = \arcsin x \\ U^2 - 5U + 4 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré a deux racines $U_1 = 1$ et $U_2 = 4$. Mais $\arcsin x$ étant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, l'équation $\arcsin x = 4$ n'a pas de solution. Par contre l'équation $\arcsin x = 1$ a une solution $x = \sin 1$, qui est la seule solution de l'équation initiale.

38) a) En partant de la relation

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t\ ,$$

on obtient

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2\ .$$

Mais $\arcsin x$ appartient à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, donc son cosinus est positif. Alors

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}\ .$$

b) L'équation s'écrit encore

$$\arcsin(2x^2) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x\sqrt{3})\ .$$

En prenant le sinus des deux membres, cela implique

$$\sin[\arcsin(2x^2)] = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(x\sqrt{3})\right] = \cos\left[\arcsin(x\sqrt{3})\right]\ .$$

Et en appliquant le a)

$$2x^2 = \sqrt{1-3x^2}\ .$$

En élevant au carré, on trouve finalement

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0\ .$$

Cette équation possède deux solutions $-1/2$ et $+1/2$. Mais si l'on remplace dans l'équation de départ, on obtient, si $x = -1/2$

$$\arcsin\frac{-\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}\ .$$

Donc $-1/2$ n'est pas solution. Par contre

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\ .$$

Donc $1/2$ convient et c'est la seule solution.

c) En remarquant que $\arcsin(x\sqrt{3})$ et $\arcsin(2x^2)$ sont tous les deux dans l'intervalle $[\,-\pi/2, \pi/2\,]$, on en déduit que la somme se trouve dans $[\,-\pi, \pi\,]$. On ne peut obtenir π que si l'on a

$$\arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(2x^2) = \frac{\pi}{2}\ ,$$

soit $x\sqrt{3} = 2x^2 = 1$, ce qui est impossible.

Autre méthode : on part de

$$\arcsin(2x^2) = \pi - \arcsin(x\sqrt{3})\ .$$

En prenant le sinus des deux membres, cela implique

$$\sin\arcsin(2x^2) = \sin(\pi - \arcsin(x\sqrt{3})) = \sin\arcsin(x\sqrt{3})\ ,$$

soit

$$2x^2 = x\sqrt{3}\ .$$

On vérifie alors que ni 0, ni $\sqrt{3}/2$ ne conviennent.

39) Transformons l'équation par implications successives. On part de

$$\arctan x + \arctan(x^3) = \arctan\frac{1}{x}\ ,$$

et l'on prend la tangente des deux membres, cela implique

$$\tan\left[\arctan x + \arctan(x^3)\right] = \frac{1}{x}\ .$$

Alors, en utilisant la formule donnant la tangente d'une somme

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\ \tan b}\ ,$$

on obtient l'équation

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = \frac{1}{x}\ ,$$

d'où

$$2x^4 + x^2 - 1 = 0 \ .$$

On pose $X = x^2$ et l'on cherche les racines positives du trinôme $2X^2 + X - 1$. Il n'y a que la valeur $X = 1/2$. Donc l'équation de départ ne peut avoir comme solutions que $x = \pm\sqrt{2}/2$.

Pour montrer que ces solutions conviennent, on remarque tout d'abord, que, puisque la fonction arctan est impaire, si l'une des deux valeurs obtenues est solution l'autre l'est aussi. On va donc se contenter de montrer qu'il existe une solution positive, en étudiant les variations sur $]\,0, +\infty\,[$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan x + \arctan(x^3) - \arctan\frac{1}{x} \ .$$

En dérivant

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^6} - \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^6} \ . \end{aligned}$$

La dérivée est donc strictement positive, et f est strictement croissante. Mais

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} \ ,$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \pi \ .$$

Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que la fonction f s'annule une fois dans $]\,0, +\infty\,[$. Cette solution est donc $\sqrt{2}/2$.

Conclusion : les solutions de l'équation sont bien $\pm\sqrt{2}/2$.

40) Transformons l'équation par implications successives. On part de

$$\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4} \ ,$$

et l'on prend la tangente des deux membres, cela implique

$$\tan\left[\arctan(x+1) + \arctan(x-1)\right] = 1 \ .$$

Alors, en utilisant la formule donnant la tangente d'une somme

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\,\tan b} \ ,$$

on obtient l'équation

$$\frac{2x}{2-x^2} = 1 \ ,$$

d'où

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \ .$$

Donc l'équation de départ ne peut avoir comme solutions que $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Pour étudier si ces solutions conviennent, étudions la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(x+1) + \arctan(x-1) .$$

C'est une fonction strictement croissante et impaire, qui admet π pour limite en $+\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-\pi, \pi[$. Et l'équation $f(x) = \pi/4$ admet une solution et une seule, cette solution étant positive. Alors cette solution est nécessairement $\sqrt{3} - 1$.

Calculons $f(\sqrt{3} - 1)$. On a

$$\frac{\pi}{4} = f(\sqrt{3} - 1) = \arctan(\sqrt{3}) + \arctan(\sqrt{3} - 2) ,$$

mais $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, et la fonction arctangente est impaire, d'où

$$\arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} .$$

Et l'on en déduit que

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} .$$

41) On peut démontrer la formule de deux manières:
(i) Posons

$$A = \arctan a + \arctan b \quad \text{et} \quad B = \arctan \frac{a+b}{1-ab} .$$

On a alors, en appliquant la formule de la tangente d'une somme

$$\tan A = \frac{a+b}{1-ab} ,$$

mais aussi

$$\tan B = \frac{a+b}{1-ab} .$$

Les nombres A et B ont donc la même tangente.

Par ailleurs B appartient à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, et A appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Alors A et B seront égaux si et seulement si $\cos A > 0$. Mais, en utilisant l'exercice 32)

$$\cos A = \cos(\arctan a)\cos(\arctan b) - \sin(\arctan a)\sin(\arctan b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} ,$$

et cette expression est positive si et seulement si $ab < 1$.

(ii) Supposons $b > 0$, et soit f_b définie sur $\mathbf{R} - \{1/b\}$ par

$$f_b(a) = \arctan a + \arctan b - \arctan \frac{a+b}{1-ab} .$$

On obtient facilement, pour tout réel $a \neq 1/b$, que $f_b'(a)$ est nul. Donc f_b est constante sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 1/b[$ et $I_2 =]1/b, +\infty[$.

Si I_1, on a $f_b(a) = f_b(0) = 0$.
Sur I_2, on a

$$f_b(a) = \lim_{x\to+\infty} f_b(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan b - \arctan\left(-\frac{1}{b}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctan b + \arctan\frac{1}{b} ,$$

et puisque, si b est positif,

$$\arctan b + \arctan\frac{1}{b} = \frac{\pi}{2} ,$$

on a donc $f_b(a) = \pi$.

Dans le cas où $b > 0$, on a donc $f_b(a) = 0$ si et seulement si $ab < 1$.

Si $b < 0$, on remarque, puisque la fonction arctangente est impaire, que

$$f_b(a) = -f_{-b}(-a) .$$

Alors $-b$ est positif et d'après ce qui précède, $f_{-b}(-a)$ est nul si et seulement si $ab = (-a)(-b) < 1$.

Enfin, si $b = 0$, on a bien $f_0(a) = a$, quel que soit a, ainsi que $ab = 0 < 1$.

Finalement, $f_b(a) = 0$ si et seulement si $ab < 1$, ce qui donne le résultat.

On peut appliquer en particulier la formule si $a = b$ lorsque $a^2 < 1$, ce qui donne

$$2\arctan a = \arctan\frac{2a}{1-a^2} .$$

Application : dans les calculs suivants, les nombres utilisés sont compris entre 0 et 1, donc la condition $ab < 1$ sera vérifiée. On obtient successivement

$$\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{13} = \arctan\frac{1}{3}$$

$$2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$$

$$\arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{1}{7} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

donc

$$2\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{13} = \frac{\pi}{4} .$$

42) Si l'on a $t = \arctan \operatorname{sh} x$, on en déduit donc que

$$\tan t = \tan(\arctan \operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x .$$

On sait que $\operatorname{ch} x$ est positif. Par ailleurs t appartient à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, donc $\cos t$ est positif. Mais

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x ,$$

on en déduit donc

$$\frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x .$$

Alors
$$\sin t = \tan t \cos t = \operatorname{sh} x \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x \ .$$

43) En utilisant l'expression de argch sous forme de logarithme, si $x \leq -1$, on a $-x \geq 1$, donc, puisque $-x - \sqrt{x^2 - 1}$ est positif,

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2 - 1}) \\
&= \ln \frac{1}{-x - \sqrt{x^2 - 1}} \\
&= -\ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}) \\
&= -\ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \ .
\end{aligned}$$