Série d'exercices : primitives - étude de fonctions

Exercice 1

Déterminer une primitive F de la fonction f sur intervalle I à préciser dans les cas suivants :

a) $f(x) = 9x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) = 9x^2\left(4-x^3\right)^8$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}$;d) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$; e) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x^2\left(x^2+1\right)^2}$ (indication : trouver a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{\left(x^2+1\right)^2}$) ;

f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; g) $f(x) = \cos^3 x - \cos 2x$;

h) $f(x) = 9\cos^4 x + \sin x \cos x$

Exercice 2

1) Trouver les primitives sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par : $f(x) = 5x^2 + \dfrac{2}{x^2}$
2) Déduisez en les primitives sur l'intervalle $]0;\pi[$ de la fonction g définie par :
$$g(x) = 5\sin^2 x \cos x + \frac{2\cos x}{\cos^3 x}$$
3) Trouver la primitive vérifiant $g(0) = 0$.

Exercice 3

Soit f et W deux fonctions définies sur l'intervalle I= $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $w(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$

1) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$
2) En déduire sur I une primitive de la fonction *w*.

Exercice 4

Soit f est une fonction définie sur IR par :
$$f(x) = \frac{x^2+2x}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$
1) Montre que f admet une primitive F sur IR de la forme F(x) = $\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$
2) Trouver toutes les primitives de f sur IR.

Exercice 5

Soit une fonction définie dans IR par :
$$f(x) = \cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$$
1) Déterminer f' et f''. Vérifier que pour tout x de IR ; $f''(x) = -9f(x)$
2) En déduire toutes les primitives de f sur IR
3) Trouver les primitives sur IR qui s'annule en $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur I=$[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ et par (C) sa courbe

1) Etudier les variations de f sur I et montrer que (C) admet une droite asymptote
2) Soit F la primitive de f sur I tel que $F(0) = 0$. On ne cherche pas à exprimer $F(x)$
   a) Pour quoi peut on affirmer l'existence de F sur I ?
   b) Quelles sont variation de F sur I ?
3) On définit sur I les fonctions H et K par :
$$H(x) = F(x) - x \text{ et } K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x .$$
   a) Etudier les variations de H et K sur I.
   b) En déduire que pour tout x $\quad 0$, on a :
$$\frac{2}{3} \le F(x) \le x$$
   c) En déduire la limite de F en $+\infty$
4) Démontrer que l'équation : $F(x) = \pi$ admet une solution unique δ Vérifiant : $\pi \le \delta \le \dfrac{3}{2}\pi$

Problème 1

Nous admettons qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur IR, et vérifiant $f(0) = 0$ *et,* pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1) **Parité**
   a) Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) + f(-x)$ est dérivable sur IR et calculer sa dérivée.
   b) Calculer $g(0)$. En déduire que la fonction f est impaire.
2) **Limite de f en $+\infty$**
   a) Montrer que la fonction
   b) $h : x \mapsto f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
   c) En déduire qu'il existe une constante c telle que, pou tout $x > 0$, on ait :

$$f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (1).$$

d) A l'aide de (1), prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c.$

3) On considère la fonction u, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \tan x.$

a) Montrer que la fonction $\psi : x \mapsto f \circ u(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

b) Calculer $\psi(0)$.

En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f(\tan x) = x.$

c) Calculer les valeurs exactes de $f(1), f\left(\sqrt{3}\right), f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ainsi que la valeur exacte de la constante c.

4) **Tracé**

a) Etudier le sens de variation de *f* sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

b) Tracer la courbe *Cf* en précisant les branches infinies éventuelles et la tangente à l'origine.

Problème 2

Soit f la fonction par $f(x) = x + \sin^2 x$ et soit Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormal

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $x \le f(x) \le x+1$ et $f(x+\pi) = f(x) + \pi.$

Qu'en déduire sur les limites à l'infini de *f(x)* et de $\frac{f(x)}{x}$? Comment trace- t- on Γ à partir de la représentation de *f* sur $[0;\pi]$?

2) Etablir le tableau de variation de *f* sur $[0;\pi]$. Déterminer les points d'intersection de Γ avec les droites d'équation $y = x$ et $y = x+1$, et préciser les tangentes en ces points.

3) Etudier sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, la position de Γ par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

4) Tracer la représentation de f sur $[0;\pi]$, puis la courbe Γ.

Problème 3

1) Soit la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$. Etudier *f* et tracer sa courbe représentative.

2) Soit les fonctions :

$g : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ et $h : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

Etudier le sens de variation de *g* et *h* sur $]0;+\infty[$.

3) Soit n un entier naturel non nul et P_n la fonction définie sur IR par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n + \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^n\right].$$

a) Démontrer que P_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

b) Soit la fonction $\psi_n : x \mapsto x^n$. Démontrer que l'on a suivant la parité de n : $P_n = g \circ \psi_n \circ f$ ou $P_n = h \circ \psi_n \circ f$.

c) En déduire le sens de variation de P_n.

Problème 4

1) .a) Démontrer que la courbe représentative, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est au dessus de sa tangente en tout point.

.b) En déduire que :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad \frac{1}{1+\alpha} \quad 1-\alpha \quad (1)$$

1) Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et a un nombre réel strictement positif.

a) Déterminer les dérivées première et seconde de g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b) Vérifier que :

$$\forall x \in [0;a[, \quad \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \le g'(x) \le \frac{1}{2}.$$

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction *g* sur $[0;a]$, démontrer que : $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \le \sqrt{1+a} \le 1 + \frac{a}{2} \quad (2).$

2) Déduire des inégalités (1) et (2) que :

$$\forall a \in]0;+\infty[, 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \le \sqrt{1+a} \le 1 + \frac{a}{2}.$$

Bon courage !