Lycée El Hadji Omar Lamine Badji | Année : 2008/09
TS1 | M . FALL

Série n°3 : Dérivation

Exercice 1

1) Montrer que f : $x \mapsto f(x) = \frac{1+x^2}{1+2x^2}$ est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ et calculer $f'(x)$

2) soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=\frac{1+\cos^2 x}{1+2\cos^2 x}$ sur l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right[$;écrire φ comme la composée de deux fonctions dérivables et calculer $\varphi'(x)$.

Exercice 2

1) Montrer que quelque soit x, y appartenant à $I = \left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]$;on a : $\left|\cos^2 x - \cos^2 y\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

2) Démontrer que pour tout réel a et b appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; on a $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$

Exercice 3

1) Soit les fonctions φ et ϕ définis par $\varphi(x) = \cos x$ et $\phi(x) = \sin x$

Montrer que φ et ϕ sont indéfiniment dérivables et que : $\varphi^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ et $\phi^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

2) soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ sur l'intervalle $\left]2;+\infty\right[$

Calculer $f'(x); f''(x); f'''(x)$; conjecturer $f^{(n)}(x)$ et démontrer la par récurrence ;

Exercice 4 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = (x-a)^n (x-b)^n$

3) Calculer la dérivée n-ième $f^{(n)}$ en utilisant la formule de Leibniz

4) En remplaçant a par b, calculer directement la dérivée n-ième de $(x-a)^{2n}$

5) En déduire l' égalité : $1+\left(c_n^1\right)^2+\left(c_n^2\right)^2+\ldots+\left(c_n^n\right)^2 = c_{2n}^n$

Exercice 5 : Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x+1}$ sur l'intervalle $\left]-1;+\infty\right[$

6) Montrer que g est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ et calculer $g'(x)$ puis encadrer $g'(x)$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

7) Déduisez en que pour tout x appartenant à $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ on a : $1+\frac{x}{\sqrt{6}} \leq g(x) \leq 1+\frac{x}{2}$.

Exercice 6 : On admet qu'il existe une fonction f dérivable qui vérifie sur IR : $f'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$ dont la courbe représentative (C) passe par l'origine O du repère.

8) déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en 0.

9) Montrer que (C) n'admet pas une tangente parallèle à la droite (Δ) : $y = 2x$

10) Justifier l'existence de la dérivée seconde f'' et montrer que $f''(x) = -2(f'(x))^3 f(x)$.

Exercice 7 Soit w une fonction dérivable sur $[1;+\infty[$ vérifiant : $w(1) = 0$ et $w'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

11) Etudier les variations de w sur l'intervalle $[1;+\infty[$

12) On définie la fonction g sur l'intervalle par $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$ Comparer w' et g' puis w et g sur $[1;+\infty[$

Montrer alors que w est majorée sur $[1;+\infty[$ et admet une limite l en $+\infty$; vérifiant : $0 \leq l \leq 1$