Lycée de Matam Année 2009/2010
TS1 M.NDOYE

Série d'exercices : fonction exponentielle

Problème

On note f_n la fonction définie sur

$]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ avec

$n\in\mathbb{N}^*$

1°) a) Calculer les limites de f_n eu - ∞ (Pour la

limité en + ∞ , poser X = x+2)

b) Etudier suivant la parité de n la limite de f en -2

2°) a) Calculer $\mathrm{f}_n'(x)$ et étudier son signe suivant

la parité de n.

d) Dresser le tableau de variation de f_n .

3°) a)Démontrer que toutes les courbes C_n de f_n

passent par un m point fixe A dont on

déterminera les coordonnées

b) Déterminer une équation de la tangente (T $_n$) à

(C_n) en A

4°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{f}_n(x)}{x}$ puis interpréter

graphiquement le résultat

b) Démontrer que $\forall$ n $\neq 0$ et

$\forall x\neq -2$ on a $\mathrm{f}'_n(x)=\mathrm{f}_n(x)-n\mathrm{f}_{n+1}(x)$

c) En déduire les positions relatives des courbes

(C_1) et (C_2)

d) Représenter graphiquement (C_1) et (C_2)

Problème

A) Soit $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$.

1- Etudier les variations de g.

2- En déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si\ \ x<0\\[2mm] x+\ln\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right| & si\ \ x\ \ \ 0\end{cases}$$

1- Vérifier que f est définie sur IR\{1} et étudier la continuité de f en 0.

2- Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement ces résultats.

3- a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\dfrac{x}{2}$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

b) Donner la nature de la branche infinie de la courbe de f en +∞.

4- Etudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote oblique Δ en +∞ sur]0 ; +∞[\{1}.

5-a) Calculer $f'(x)$ et préciser le signe de $f'(x)$ sur]-∞ ; 0[à l'aide de la partie A).

b) Donner le tableau de variation de f.

6- Soit h la restriction de f sur]-∞ ; 0[. h est-elle bijective de]-∞ ; 0[sur un intervalle J à préciser ?

7- Tracer la courbe de f (unité 2cm) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$.

8- a) Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{x}{(2x+1)(x-1)}=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x-1}.$$

b) Soit λ un réel tel que 1 < λ < 2. Déterminer l'aire A(λ) du domaine délimité par la courbe de f, l'asymptote Δ et les droites d'équations : x = λ et x = 2.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 1} A(\lambda)$.

Problème 5 **:**

I. On considère la fonction f définie sur IR par :

$f(x)=x(1+e^{2-x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i}\,\vec{j})$ (unité : 2cm)

1- Soit h la fonction définie sur IR par :

$h(x)=1+(1-x)e^{2-x}$

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b) En déduire le signe de h(x) sur IR.

2- a) Calculer les limites de f en +∞ et en -∞.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en -∞.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à la droite Δ : y = x.

3- a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur IR.

c) f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire ($\mathcal{C}$) (on tracera la tangente à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 2).

f) Construire ($\mathcal{C}'$) courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

II. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives x = 0 et x = λ et les courbes d'équation respectives : y = f(x) et y = x. Soit a(λ) l'aire de R_λ en cm².

1- Calculer a(λ) en fonction de λ.

2- Déterminer $b = \lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Problème 6 **:**

A- Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$.

1- a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1+x]=0$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe (unité 2cm).

c) Montrer que f réalise une bijection de]-∞ ; +∞[sur]-∞ ; 0[.

2- Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$.

a) Démontrer que g est dérivable sur IR.

b) Montrer que quel que soit le réel x, $g'(x)=e^{-x}f(x)$

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$.

d) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

3- a) Montrer que $\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) A tout réel λ, on associe le réel $I(\lambda)=\int_0^\lambda g(x)dx$. Justifier l'existence de I(λ). Calculer I(λ) à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

B- 1- Montrer que g est une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

2- a) Calculer g(0).

b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point ln2.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse ln2.