Lycée de Matam — Année 2008/2009

TS1 — M.NDOYE

Série d'exercices : fonctions numériques

Exercice 1

1) Etudier les branches infinies où directions asymptotiques dans les cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{5x^3+3\sqrt{x}}{x}$; b) $g(x)=\sqrt{3x+5}$;

c) $h(x)=x-\sqrt{x}$; d) $k(x)=x+\sin\pi x$;

e) $l(x)=x+x\cos^2\pi x$; f) $v(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

2) Soit la fonction définie par $f(x)=\alpha x+\beta-\sqrt{x^2+1}$ où α et β sont des paramètres réels.

a) Etudier suivants les valeurs des réels α et β les branches infinies ou asymptotes de f.

b) Déterminer α et β pour que la droite $(D): 2x-y+2=0$ soit asymptote oblique en $-\infty$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes en utilisant la composition des fonctions

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left[\left(\dfrac{x+1}{6x-\pi}\right)\pi\right]$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3}{x-1}}$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\tan\left[\left(\dfrac{x+1}{6x}\right)\dfrac{\pi}{2}\right]$; d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}$.

Exercice 3

1) Etudier la continuité en a = -1 ; en a = 2 et a = 3 de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x-2}$

2) Soit la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

a) Déterminer le domaine de continuité de g

b) Peut-on prolonger la fonction g par continuité sur IR.

Exercice 4

1) Déterminer et justifier la continuité des fonctions suivantes sur des sous- ensembles de IR les plus grands possibles en utilisant les opérations sur la continuité :

$f(x)=x^2+\sqrt{x}$; $g(x)=\pi\tan x$;

$h(x)=\dfrac{1}{x^2+1+\cos x}$; $k(x)=\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{x}}$;

$l(x)=\sqrt{\sin x+1}$; $u(x)=E(x)\cos x$;

$v(x)=\tan\left[x\left(\dfrac{\sin x+1}{\cos x}\right)\right]$.

2) En utilisant la composé des fonctions, justifier la continuité des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\tan\left[\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right]$ sur $I=]0;2[$

b) $g(x)=\cot\mathrm{an}\pi x$ sur D_g

c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{x+1-a}{x-1-a}}$ sur D_h où $a\in IR$

d) $u(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin\pi x}$ sur D_u.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f: IR_+\to[4;+\infty[$, $x\mapsto\sqrt{x^2+16}$

1) Montrer que f est une bijection de $IR_+\to[4;+\infty[$. Expliciter f^{-1}.

2) Montrer de deux façons différentes que f^{-1} est continue sur $[4;+\infty[$.

Exercice 6

Soit $f(x)=\begin{cases} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Etudier la continuité de f en $x=\dfrac{1}{n}$ si n 2 et $x=1$

3) En déduire le domaine de continuité de f

Exercice 7

1) Soit f une fonction définie sur IR_+ et continue sur l'intervalle $[0;T[$ $(T>0)$.

a) Montrer que si f est périodique de période T et $a\in[0;T[$ alors f est continue en $a+kT, k\in Z$.

b) En déduire que f est continue $IR_+-\{kT, k\in Z\}$

2) Soit g définie sur IR par $g(x)=(x-E(x))^2$

a) Etudier la continuité de g sur l'intervalle $[0;1[$

b) Montrer que la fonction g est périodique de période T à préciser ;

c) En déduire des questions précédentes le domaine de continuité de la fonction g

3) Représenter graphiquement g sur l'intervalle $[0;3[$

Exercice 8

Soit $f(x)=x^3-6x^2+x+1$

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution dans l'intervalle $[0;1[$

2) Déterminer par la méthode de dichotomie une valeur approchée de la racine à 0,1prés.

Exercice 9

On considère l'équation $(E): \left|x\sqrt{1-x}\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

1) Démontrer que (E) admet 3 solutions $x_1<x_2<x_3$

vérifiant $-\frac{1}{3} < x_1 < 0,\ 0 < x_2 < \frac{2}{3};\ \frac{2}{3} < x_3 < 1.$

2) Pour $i \in \{1,2,3\};$ on pose $u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)$.

Démontrer qu'il existe un nombre réel θ_i tel que $u_i = \cos\theta_i$

a) Démontrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont solutions de l'équation $(E') : \cos 3\theta = \frac{1}{2}$.

b) En déduire les solutions de (E).

Exercice 10

1) Montrer que $f : x \mapsto f(x) = \frac{1+x^2}{1+2x^2}$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

2) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+2\cos^2 x}$ sur l'intervalle $]-\pi;\pi[;$ écrire φ comme la composée de deux fonctions dérivables et calculer $\varphi'(x)$.

Exercice 11

1) Montrer que quelque soit x, y appartenant à $I = \left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]$ on a :

$$\left|\cos^2 x - \cos^2 y\right| \le \frac{1}{2}|x-y|.$$

2) Démontrer que pour tout réel a et b appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}$

Exercice 12

1) Soit les fonctions φ et ϕ définis par :

$\varphi(x) = \cos x$ et $\phi(x) = \sin x$ $\phi(x) = \sin x$

Montrer que φ et ϕ sont indéfiniment dérivables et que

$$\varphi^n(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ et } \phi^n(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

2) soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$. Calculer $f'(x), f''(x), f'''(x);$ conjecturer $f^{(n)}(x)$ et démontrer la par récurrence

Exercice 13

Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x+1}$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

1) Montrer que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et calculer $g'(x)$ puis encadrer $g'(x)$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

2) Déduisez en que pour tout x appartenant à $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ on a

$$1+\frac{x}{\sqrt{6}} \le g(x) \le 1+\frac{x}{2}$$

Exercice 14

On admet qu'il existe une fonction f dérivable qui vérifie sur IR : $f'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$ dont la courbe représentative (C) passe par l'origine O du repère.

1) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en 0.

2) Montrer que (C) n'admet pas une tangente parallèle à la droite $(\Delta) : y = 2x$

3) Justifier l'existence de la dérivée seconde f'' et montrer que $f''(x) = -2(f'(x))^3 f(x)$.

Exercice 15

Soit w une fonction dérivable sur $[1;+\infty[$ vérifiant :

$$w(1) = 0 \text{ et } w'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

1) Etudier les variations de w sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

2) On définie la fonction g sur l'intervalle par $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Comparer w' et g' puis w et g sur $[1;+\infty[$. Montrer alors que w est majorée sur $[1;+\infty[$ et admet une limite L en $+\infty$ vérifiant : $0 \le L \le 1$.

Exercice 9

1) Etablir, pour tout $x \quad 0$, l'encadrement :

$$1-\frac{x}{2} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2.$$

2) Etudier la limite éventuelle en 0^+ de

$$x \mapsto \frac{1}{x}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)\right].$$

3) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ admet, sur $\left]0;+\frac{\pi}{2}\right]$, une infinité d'extremums. Préciser les abscisses de ces extremums ainsi que leur nature.