EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Exercice 1

On donne $A(2\ ,-1,\ 3)$, $B(1,\ 2,\ 0)$, $C(-2,\ 1,\ 2)$ et $D(-1,\ -2,\ 5)$.

1. $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?
2. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 2

On donne $A(-3\ ,\ 1,\ 4)$, $B(-2,\ -1,\ 7)$, $C(-4,\ -1,\ -2)$ et $D(-5,\ -5,\ 4)$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 3

On donne $A(1,\ 1,\ 3)$, $B(\sqrt{2}+1,\ 0,\ 2)$ et $C(\sqrt{2}+1,\ 2,\ 2)$.

Nature du triangle ABC ?

Exercice 4

On donne $A(1,\ -2,\ 3)$, $B(0,\ 4,\ 4)$ et $C(4,\ -20,\ 9)$.

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Problème 1

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a. On note G son centre de gravité.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{a^2}{2}$ et qu'il en est de même pour les autres sommets.
2. Démontrer que deux arêtes opposés sont orthogonales.
3. Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$.

Problème 2

$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1. On considère le repère $(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$.

1. Calculer la longueur CE.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité I de AHF et du centre de gravité J de BDG.
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (AHF) ainsi qu'au plan (BDG). (Rappel : pour montrer que d'une droite d est orthogonale à un plan P, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P)
4. Démontrer que $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

Problème 3

ABCD est un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

On définit les points P, Q, R et S par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \ ; \ \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \ ; \ \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

Le but de problème est de démontrer que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que :

$$P = \text{bar}(A, 2)(B, 1) \ ; \ Q = \text{bar}(A, 2)(D, 1) \ ; \ R = \text{bar}(C, 2)(B, 1) \ ; \ S = \text{bar}(C, 2)(D, 1)$$

3. On considère le barycentre G de $(A, 2)(B, 1)(C, 2)(D, 1)$.

   En utilisant la règle d'associativité, démontrer que $G \in (PS)$ puis que $G \in (QR)$ et enfin que $G \in (IJ)$.
4. Conclure.

Question subsidiaire : que pensez-vous du quadrilatère *PQSR* ? (Justifier votre réponse)

Problème 4

ABCDEFGH est un cube de côté égal à 1. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

I est le centre du carré *EFGH* et J est le centre du carré *BCGF*.

1. Faire une figure.
2. Préciser les coordonnées de I et J.
3. Calculer les distances AI, AJ et IJ.
4. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.