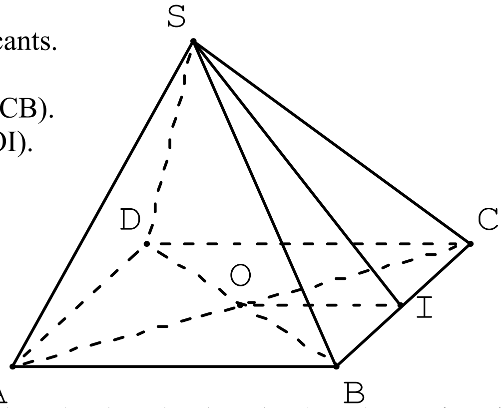
Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : SABCD est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de [SA], N est le point de [SC] tel que SN = SC. O est le centre de ABCD. (SO) est donc la hauteur de la pyramide. I est le milieu de l'arête [BC].

1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécants.
2. Placer le point d'intersection de (MN) et (AC).
3. Démontrer que (SO) est orthogonale à la droite (CB).
4. En déduire que (CB) est orthogonale au plan (SOI).



Exercice 3 : ABCD est un tétraèdre.

1. G est le barycentre des points pondérés (A ;1) , (B ;1) , (C ;2) , (D ;1).Préciser la position de G.
2. I et J sont les milieux respectifs de [AB]et [CD]. Les points E , F et H sont définis par :
   $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$ et H milieu du segment [EF]

 a. Vérifier que F est le barycentre (B ;1-a) et (C ;a), et que E est barycentre de (A ;1-a) et (D ;a)

b. En utilisant l'associativité du barycentre montrer que H est barycentre des points pondérées (A ;1-a) , (B ;1-a) , (C ;a) et (D ;a).

c. En déduire que les points I, J et H sont alignés

Exercice 4 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O ,$\vec{i}$;$\vec{j}$; $\vec{k}$).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)et (D')dans les cas suivants :
   a. (D) passe par A(-2 ;3 ;5) et B(2 ;1 ;3)
   b. (D') passe par C(1 ;2 ;3) et parallèle à (EF) avec E(0 ;2 ;3) et F(-1 ;2 ;1).
2. Déterminer l'intersection des droites (D) et (D') (s'il existe.)
3. Calculer les coordonnées G du barycentre de (A ;2) ;(B ;1) ;(E ;-3) et (F ;4)

Exercice 5 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O ,$\vec{i}$;$\vec{j}$; $\vec{k}$).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)et (D')dans les cas suivants :
   a. (D) passe par A(1 ;2 ;3) et de vecteur directeur $\vec{U}$ (-1 ;3 ;5).
   b. (D') passe par C(0 ;1 ;4) et de vecteur directeur $\vec{V}$ (-1 ;-1 ;1).
2. Quelle est la position relative des droites (D) et (D'). Soit {F} = (D)∩(D')
3. Calculer les coordonnées G du barycentre de (A ;2) ;(C ;1) ; (F ;-4).
4. Trouver une représentation paramétrique puis cartésienne du plan définie par (D) et (D').

Exercice 6 L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O ,$\vec{i}$;$\vec{j}$; $\vec{k}$).
(D) est la droite passe par A(1 ;-3 ;2) et de vecteur directeur $\vec{U}$ (2 ;1 ;3).
(P) est le plan d'équation : 2x-y+5z+4 = 0.

1. La droite (D) et le plan (P) sont- ils parallèles ?
2. Trouver les coordonnées du point d'intersection de (D) et (P).
3. Donner une équation de la sphère (Ω) de centre A et passant par l'origine du repère.
4. Quelle est l'équation de la tangente (T) passant par O de ce sphère ?
5. Déterminer l'intersection de la sphère (Ω) et du plan (P).

Exercice 7 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$). Les points A ; B ; C sont définies par : $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

1. Montrer que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires.
2. a. Déterminer les équations des plans médiateurs des segments : [OA] ;[OB] et [OC].
   b. Déduire le centre de la sphère circonscrit au tétraèdre OABC et le rayon de la sphère.

Exercice 8 : Soit A et B et C deux points de l'espace tels que AB = 8 ;BC = 6 et AC = 5 . Déterminer et construire dans chacun des cas l'ensemble des points M de l' espace tel que :
a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-12$; b. $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AM}=-12$; c. $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$; d. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$
e. $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})$; f. $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$; g. $\|MA+MB+MC\|=\frac{3}{2}\|MA+MB\|$.

Exercice 9 L'espace est orienté et muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B, C de l'espace de coordonnées respectives dans ce repère :
$A(2;0;0)$; $B(1;3;0)$; $C(1;1;2)$

Soit le triangle $M_1M_2M_3$ défini par : $\overrightarrow{OM_1}=a\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM_2}=b\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OM_3}=c\overrightarrow{OC}$ où a, b, c sont trois nombres réels de l'intervalle $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$.

Le but de l'exercice est de déterminer, parmi les triangles $M_1M_2M_3$, un triangle d'aire maximale.

1. Faites une figure.
2. On pose : $\overrightarrow{S_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{S_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{S_3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{S_4}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
   a. Calculer les coordonnées de ces quatre vecteurs ainsi que leurs normes. On note S la plus grande de ces normes. Prouver l'égalité : $\overrightarrow{S_4}-\overrightarrow{S_1}-\overrightarrow{S_2}-\overrightarrow{S_3}=\vec{0}$
   b. On pose $\vec{T}=\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}$ interpréter géométrique la norme de $\vec{T}$
   c. Prouver l'égalité : $bc\overrightarrow{S_1}+ca\overrightarrow{S_2}+ab\overrightarrow{S_3}=\vec{T}$ Montrer aussi que $\vec{T}$ s'écrit sous la forme $\vec{T}=(bc-x)\overrightarrow{S_1}+(ca-x)\overrightarrow{S_2}+(sc-x)\overrightarrow{S_3}+x\overrightarrow{S_4}$ où x un réel quelconque.
3. On suppose $a\leq c$ et $b\leq c$. En choisissant x = ab, prouver l'inégalité.
   $\|\vec{T}\|\leq(bc+ca-ab)S$
   Déduisez de l'inégalité $bc+ca-ab=c^2-(c-b)(c-a)$ que $0\leq(bc+ca-ab)\leq 1$ puis l'inégalité $\|\vec{T}\|\leq S$.
4. Préciser, parmi les triangles $M_1M_2M_3$, un triangle dont l'aire est maximale.

Exercice 8

Le plan P est du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .on considère les points d'affixes
$A(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ $M(z)$ et $N\left(\frac{1}{z}\right)$; $z\neq 0$ et $z=re^{i\theta}$

1) P désigne le barycentre du système $\{(M;2),(N;2)\}$ Exprimer les coordonnées de P en fonction de r et de θ .

2) Montrer que lorsque M décrit le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon OA alors P décrit une un courbe ($\mathcal{E}$)dont on donnera l' équation
3) Tracer cette courbe et préciser ses sommets
4) Soit f l'affinité orthogonal de rapport $k\left(k>0\right)$ et d' axe $\left(O;v\right)$ Dé terminer k pour que l' image de la courbe ($\mathcal{E}$) soit un cercle ($\mathcal{G}$) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 9

Le plan P est du repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M de P de coordonnées (x,y) vérifiant : $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ y(t)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$ $t\in IR$

Montrer que le lieu de M est une conique ($\mathcal{C}$)dont on précisera les éléments caractéristiques. Représenter ($\mathcal{C}$)

Exercice 10

Le plan P est du repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit M(z) on associe le point M'(z') définie par $z'=z-\dfrac{1}{z}$ avec $z=re^{i\theta}$ $\left(r>0\right)$

1) Calculer les coordonnées de x' et y' en fonction de r *et* θ
2) Montrer que lorsque M décrit le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon $r=2$ alors M' décrit une ellipse ($\mathcal{E}$)
3) Déterminer les sommets et les foyers de ($\mathcal{E}$) puis représenter ($\mathcal{E}$).

Exercice11

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z : (E)$\left(\cos^2\theta\right)z^2-4(\cos\theta)z+5-\cos^2\theta=0$.

1. Résoudre (E) dans C. Préciser pour quelle valeur de θ l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporte à un repère orthonormal. On appelle M' et M'' les points de $\mathcal{P}$ dont les affixes respectifs sont les nombres z' et z'' solutions de (E)

Montrer que, lorsque θ varie M' et M'' se déplacent sur une hyperbole ($\mathcal{H}$).Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de ($\mathcal{H}$). Tracer ($\mathcal{H}$).

3. Montrer que lorsque θ décrit l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ l'ensemble ($\mathcal{F}$) décrit par les points M' et M'' est une branche de ($\mathcal{H}$).

Exercice 12

Soit AOB un tringle équilatéral du plan oriente tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

On note H le milieu de [AB], I celui de [OB] et (Δ) la médiatrice de [AB]. ON note s la similitude plane directe de centre O transformant le point A en I.
M désigne un point quelconque du plan et M' son image par s.

1. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.
b. Construire le point C du plan tel que s(C) = A. (On justifiera la construction).
c. Exprimer AM' en fonction de CM.

2. On note M'' l'image de M par la réflexion d'axe (Δ). On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que A est équidistant de M' et M''.

a. montrer que AM''=BM.

b. Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si CM = 2BM.

c. Déterminer la nature de (Γ) puis construire (Γ).

Exercice 13

Le plan P est du repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation : $25\left(x^2+y^2\right)=\left(3x-16\right)^2$ (1)

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice (Δ) d'équation $x=\dfrac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de (E).

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

a. Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

b. Démontrer que $OM=\dfrac{16}{5+3\cos\theta}$.

3. On suppose que $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en M'.

a. Démontrer que $\dfrac{1}{OM}+\dfrac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b. Démontrer que $\dfrac{1}{OM}-\dfrac{1}{OM'}=\dfrac{2}{OI}$

Exercice 14

FGH est un triangle équilatéral de coté l. Soit (H) l' hyperbole de foyer F, de directrice (GH) et d' excentricité 2.

1) Déterminer les sommets S et S' de cette hyperbole (on remarquera S et S' sont sur la hauteur issue du sommet issue de F dans le triangle FGH) son centre O et le deuxième foyer en fonction de F'. Calculer en fonction de l, la distance des deux sommets $2a$ et la distance des deux foyers
2) On choisie le repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Où O est le centre de l'hyperbole et u un vecteur directeur de la demi droite $\left[OF\right)$; Ecrire une équation de (H) et donner l' allure de (H) .

Courbes paramètres

Exercice 1

Soit (Γ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x=\cos t-\sin t \\ y=\cos t+\sin t \end{cases} \quad t\in\left[0;2\pi\right]$$

1) Montrer que (Γ) est un cercle
2) Représenter (Γ)

Exercice 2(Cardioïde)

Le plan est du repère orthonormal direct $\left(O,i,j\right)$.

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) En utilisant la parité et la périodicité des fonctions x(t) et y(t) réduisez l'intervalle d'étude et déterminer les symétriques de la courbe (C)
2) Etudier les variations des fonctions x(t) et y(t)
3) a) Montrer que, si $t \neq \pi$, la droite OM_t a pour vecteur directeur $u = (\cos t)\, i + (\sin t)\, j$.

   b) Déduisez en la tangente au pont $M(\pi)$ de la courbe (C) puis tracer (C).

<u>Exercice 3</u> (Spiral logarithmique)

Soit (Ψ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Par quelle transformation passe t-on de $M(t)$ à $M(t+2\pi)$ et à $M(t-2\pi)$
2) Etudier les variations $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ pour $t \in [0;2\pi]$
3) Construire la courbe représentative de (Ψ) constituée des points M(t) pour $t \in [0;2\pi]$
4) Déduisez-en la partie de la courbe de (Ψ) constituée des points M(t) pour $t \in [-2\pi;2\pi]$

<u>Exercice 4</u> (courbe de lissajou)

Soit $(\wp)$ la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = cost \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer l'intervalle d'étude utile.
2) Etudier les variations de $x(t)$; $y(t)$
3) Montrer que la courbe est inscrite dans un carré de coté 2
4) Déterminer les points de contact avec ce carré et les tangentes en ces points.
5) Tracer la courbe $(\wp)$.

<u>Exercice5</u> (cyloide)

Soit (Φ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = R(1-\sin t) \\ y(t) = R(1-cost) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Comparer les coordonnées des points $M(t)$ et $M(t+2\pi)$ et montrer que ces points ce correspondent dans une translation. Déduisez en l'intervalle d'étude utile
2) Etudier les variations de $x(t)$; $y(t)$ et calculer le vecteur dérivée $V(t)$
3) On suppose ici que t est non nul, montrer que la droite (OM_t) admet un vecteur directeur $u(t) = \frac{1}{t}(1-\cos t)\, i + \frac{1}{t}(\sin t)\, j$ .déterminer les limites des coordonnées de u et déduisez en la tangente en O à la courbe (Φ)

Exercice 6

Le plan est du repère orthonormal direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. On considère le cercle C de centre I et de rayon 1 et la droite (Δ) d'équation $x = 1$. Une droite variable (D) passant par O, coupe le cercle C en A. et la droite (Δ) en A'.

On note M le point de (D) tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA'}$.

La courbe S, lieu des points M lorsque la droite (D) varie, est appelée Strophoïde droite.

1) On note t la pente de la droite (D).
   Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t\left(t^2-1\right)}{t^2+1} \end{cases} \quad t \in IR$$

2) a. Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.
   b. Etudier les variations des fonctions $t \mapsto x(t) \quad et \quad t \mapsto y(t)$ pour $t \in [0,+\infty[$, et construire la courbe S.

3) Calculer la distance de M à la droite (Δ), puis la limite de cette distance lorsque $t \to +\infty$.
Interpréter graphiquement.