Exercice :

1- Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

2- a) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

b) En intégrant par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$ (on remarquera que $\left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$).

Exercice :

1- Justifier l'existence des intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

2- Calculer $I + J$ et $I - J$. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice :

On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$; et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$.

1- Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$. Calculer $f'(x)$.

2- En déduire I.

3- Vérifier que $J + 2I = K$.

4- A l'aide d'une intégration par parties sur l'intégrale K montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

5- En déduire les valeurs de J et K.

Exercice :

1- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in$ IR\{-1 ; 0 ; 1}, on ait :
$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

2- Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$.

3- Par une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_2^3 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$.

Exercice :

1- Factoriser, sur IR, le polynôme $P = X^3 - 1$.

2- Calculer l'intégrale $I = \int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x^3-1}dx$.

Exercice :

1- Déterminer les réels a, b et c tels que $\frac{2x^2+3x}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$ pour tout $x \neq -2$.

2- Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2}dx$.

3- Calculer l'intégrale $J = \int_0^2 (4x+3)\ln(x+2)dx$.

Exercice :

1- Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$.

2- On désire maintenant calculer l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$.

a) Démontrer que $\cos^5 x = \cos x(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)$.

b) En déduire J .

Exercice :

1- Résoudre le système $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$

2- On pose $I = \int_0^{\ln 6} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln 6} \frac{1}{e^x + 4} dx$.

Calculer $I - 3J$ et $I + J$. Déduire de la question 1) les valeurs exactes de I et J .

Exercice :

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$; $n \in IN \cdot$

1- Calculer I_0 et I_1 .

2- En intégrant deux fois par parties, établir une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2} . En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

3- Montrer que, pour tout $n \in IN$, $0 < I_n < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n dx \cdot$

4- En déduire que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Exercice :

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx \cdot$

1- Calculer I_0 et J_0 .

2- On suppose maintenant que n est non nul.

a) En intégrant par parties I_n , puis J_n , montrer que :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n .

3- Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

Exercice :

On considère la suite (U_n) définie pour $n \quad 0$ par : $U_n = \int_1^2 e^{-nt^2} dt$.

1- Démontrer que, pour tous $n \in IN$ et $t \in [1; 2]$: $0 \leq e^{-nt^2} \leq e^{-nt}$.

2- En déduire que : $0 \leq U_n \leq \frac{e^{-n} - e^{-2n}}{n}$; $\forall n \in IN$.

3- En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice :

On considère la suite (U_n) définie pour $n \quad 0$ par : $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$.

1- Calculer U_0 et U_1 .

2- Démontrer que : $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$; $\forall n \in IN$.

3- En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice :

On pose pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1- Calculer I_0 .

2- A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

3- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul

$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.

4- En déduire I_2.
5- Démontrer que, pour tout entier naturel n, I_n est positive.

6- Déduire de la question 3) que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.

7- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$.

1- Calculer I_1 et I_2.

2- Démontrer que, pour tout entier naturel $n \quad 2$, $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$.

3- Calculer I_3 et I_4.

Exercice :

On pose pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1- Calculer I_0, I_1 et I_2.
2- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \quad 2$,
$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (on pourra remarquer que $\cos^n x = \cos x \cos^{n-1} x$).
3- En déduire I_3 et I_4.

Exercice :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$.

1- A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que : $I_n = (-1)^n e^{-n\pi} \frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

2- Démontrer que la suite (I_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
3- a) Montrer que cette suite converge et préciser sa limite.
b) On pose $S_n = I_0 + I_1 + ... + I_n$; $(n \in IN)$. Calculer S_n en fonction de n, puis calculer sa limite.

Exercice :

La suite $(I_n)_{n \in IN}$ est définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1- Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout entier naturel n, $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

2- En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en conclure pour I_n ?

Exercice :

Soit les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$.

1- Calculer $I + J$.
2- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I - J$.
3- En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice :

On se propose de calculer $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^3} dx$.

1-Calculer $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{\left(1 + e^x\right)^2} dx$.

2- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t > 0$; on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad (*)$$

3- En posant $t = e^x$ dans l'égalité (*) ; calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{\left(1 + e^x\right)^2} dx$.

4- a) A l'aide d'une intégration par parties exprimer J en fonction de I .

b) En déduire la valeur de J .