Lycée de Matam
TS1

Année 2008/2009
M.NDOYE

CALCUL INTEGRAL

Exercice1

Calculer les intégrales I suivantes :

a) $I=\int_1^x \frac{1}{t^4}e^{\frac{1}{t^3}}dt$; b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos 2x}e^{\tan x}dx$; c) $I=\int_2^3 \frac{\ln x^2}{x}dx$; d) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$

e) $I=\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2t+1}$; f) $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

g) $I=\int_0^1 \frac{3}{(3+2t)^4}dt$; h) $I=\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

i) $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}\ln(1+\cos x)dx$; j) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\sin 2x dx$;

k) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5 x-3\cos x\sin x)dx$ l) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\tan^3 x)dx$ m) $I=\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$ n) $I=\int_0^1\left(\sqrt{2t+1}+\frac{1}{\sqrt{t+5}}\right)dt$

Exercice 2

Calculer les intégrales en faisant un changement de variable.

a) $I=\int_1^2 t^2\sqrt{a+t}dt$ avec $a>0$ b) $I=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$

c) $I=\int_1^4 t\sqrt{1+t^2}dt$

Exercice 3

Calculer en utilisant une ou des intégrations par parties.

a) $I=\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$; b) $I=\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$; c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t}dt$

d) $I=\int_1^x (1+t)\ln t dt$; e) $I=\int_1^e x^2\ln x dx$

f) $I=\int_0^2 (x^2-x+1)e^{2x}dx$; g) $I=\int_1^x \ln(t+\sqrt{t^2+1})dt$

h) $I=\int_0^{\pi} 2t\cos^2 t\sin t dt$; i) $I=\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x dx$

Exercise 4

On pose, $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_1^e (\ln x)^n dx$

1) a) Justifier l'existence de I_n.

b) Démontrer que $\forall n \quad 2 \quad I_n=e-nI_{n-1}$

2) On définit la suite (U_n) et on pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$,
$I_n=(-1)^n(eU_n-n!)$

a) Exprimer $\forall n\in\mathbb{N}^*$ U_{n+1} en fonction de n et U_n

b) En déduire que $U_n\in\mathbb{N}$

Exercice 5

On donne $I_0=\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$; $I_1=\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$; $I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}dx}{1+e^x}$

1) Calculer I_0+I_1 et I_1 . En déduire la valeur de I_0
2) Calculer I_n+I_{n+1} en fonction de n. En déduire I_2 et I_3
3) Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque $x\in[0;1]$. En déduire sans calcul que (I_n) est croissante.
4) Montrer que, $\forall x\in[0;1]$, on a : $\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+e^x}\le\frac{1}{2}$.
En déduire un encadrement de I_n . Quelle est la limite de (I_n)

Exercice 6

On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x \sin^5 t\cos t dt\right)dx$

Linéariser $\sin^6 x$ et Démontrer que $I=\frac{15\pi-44}{1152}$

Exercice 7 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$f(x)=\frac{x+1}{x}+\ln x-\ln(x+1)$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe.
2) Soit λ un réel supérieur à 1 et D_λ { M(x,y) , $1\le x\le\lambda$ et $1\le y\le f(x)$ }
Calculer l'aire $A(D_\lambda)$) de D_λ . Etudier la limite de $A(D_\lambda)$ lorsque λ tend vers + ∞

Exercice 8

1) On pose $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$;
$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$ et $I_1+I=I_2$
Calculer I_2 puis I_1 et en déduire I
2) Soit $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$
a) Calculer I+J et I-J en effectuant une intégration par parties.
b) En déduire I et J.

Exercice 9

1) Soit $I_n=\int_1^e x^n\ln x dx$ où n est un entier naturel
a) Calculer I_n en intégrant par parties.
b) Calculer la limite de I_n quand n tend vers + ∞
2) On désigne par $n\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}$ avec $n\neq-1$ et x>1
a) Calculer $I_n(x)=\int_1^x t^n\ln t dt$
En déduire le calcul de $J_n(x)=\int_1^x t^n(\ln t)^2dt$

b) Calculer $I_n(e) - J_n(e)$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$

Exercice 10

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 + x}$

On se propose de trouver un encadrement de l'aire A de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ et $0 \leq y \leq f(x)$

1) Etudier f et tracer C_f .
2) Monter que pour tout $x \quad 1$: $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$
3) Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$
4) En déduire un encadrement de $K = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$ puis un encadrement de A.

Exercice 11

Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} \\ u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x dx}{\cos x} \end{cases}$

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx$. En déduire $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n.
2) Calculer u_1 ; en déduire u_3 et u_5.
3) Calculer u_0 (on pourra poser $t = \tan\dfrac{x}{2}$) en déduire u_2 et u_4

Exercice 12

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 1)^n dx, (n \in IN)$.

1) A l'aide d'une intégration par partie, établir la relation de récurrence : $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ si $n \quad 1$
2) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 13

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx, n \in IN$

1) Calculer I_0.
2) Trouver une formule de récurrence entre I_n et I_{n-1}
3) Calculer I_n en fonction de n.
4) Etudier la limite de la suite (I_n)

Exercice 14

On pose $I_p = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^p dx, (p \in IN)$.

1) .
   a) Par une intégration par partie, calculer I_1.
   b) Montrer que si p est un entier non nul, alors :
   $$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p .$$
   c) En déduire I_2 puis I_3.
2) .
   a) Montrer que la suite (I_p) est décroissante.
   b) Etablir la convergence de cette suite vers une limite que l'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 15

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sin x} & \text{si } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que, pour tout n de IN, la fonction f_n est continue sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2) On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx, \quad (n \in IN)$
   Pour $n \quad 2$, calculer $I_n - I_{n-2}$
3) Montrer que pour $n \quad 1$,
   $$I_{2p} = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\right)$$
   Pour $p \quad 0$, calculer I_{2p+1} en fonction de p.

Exercice 16

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}, (n \in IN^*)$ et soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k$

1) Montrer que l'on a : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = u_n$
2) Montrer que pour tout $x \neq -1$ l'on a :
   $$f(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$
3) En déduire que : $u_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = \ln 2$
4) Montrer que l'on a : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx$
5) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 17

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{p}{n}\right) \left(n \in IN^*\right)$

1) Soit p un élément de IN^*. Utiliser la monotonie de la fonction ln pour, justifier que :
   $$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{p}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} \ln x dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{p+1}{n}\right)$$

2) Utiliser 1) pour démontrer :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx$$

3) Démontrer que (u_n) converge vers – 1.

4) Soit $v_n = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ $\left(n \in IN^*\right)$ $\left(\text{on note } v_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

a) Montrer que, pour tout n de IN^*, on a : $v_n = e^{u_n}$

b) En déduire que (vn) converge vers $\frac{1}{e}$.