Lycée de Matam   Année 2008/2009

TS1   M.NDOYE

Série d'exercices sur le calcul intégral

Exercice1

Calculer les intégrales I suivantes :

a) $I=\int_1^x \frac{1}{t^4} e^{\frac{1}{t^3}} dt$; b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos 2x} e^{\tan x} dx$;

c) $I=\int_2^3 \frac{\ln x^2}{x} dx$; d) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx$

e) $I=\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2t+1}$; f) $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$

g) $I=\int_0^1 \frac{3}{(3+2t)^4} dt$; h) $I=\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;

i) $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \ln(1+\cos x) dx$; j) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin 2x dx$;

k) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 x - 3\cos x \sin x) dx$ l) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x) dx$ m) $I=\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$

n) $I=\int_0^1 \left(\sqrt{2t+1}+\frac{1}{\sqrt{t+5}}\right) dt$

Exercice 2

Calculer les intégrales en faisant un changement de variable.

a) $I=\int_1^2 t^2 \sqrt{a+t}\, dt$ avec a >0 b) $I=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$

c) I= $\int_1^4 t\sqrt{1+t^2} dt$

Exercice 3

Calculer en utilisant une ou des intégrations par parties.

a) I= $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$; b) $I=\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$; c) I= $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t} dt$

d) I= $\int_1^x (1+t) \ln t dt$; e) I= $\int_1^e x^2 \ln x dx$

f) I= $\int_0^2 (x^2-x+1)e^{2x} dx$;g) I= $\int_1^x \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) dt$

h) $I=\int_0^\pi 2t\cos^2 t \sin t dt$; i) $I=\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$

Exercice 1

On considère les intégrales :

$$I=\int_0^\pi \cos^4 x dx \text{ et } J=\int_0^\pi \sin^4 x dx .$$

1) Montrer que I peut s'écrire :

$$I=\int_0^\pi cosx\left(cosx - cosx \sin^2 x\right) dx .$$

2) A l'aide d'une intégrale par parties, montrer que :

$$I=\int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J .$$

3) Montrer de même que :

$$J=\int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I .$$

4) Montrer que :

$$I+J=\frac{3\pi}{4} \text{ et } J-I=0.$$

5) En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 2

2) Montrer que $\cos 3x = cosx\left(\cos 2x - 2\sin^2 x\right)$

3) Pour tout n∊IN, on pose :

$$S_n(\theta)=\ln\left(2\cos\frac{\theta}{3}-1\right)+\ln\left(2\cos\frac{\theta}{3^2}-1\right)+\ldots+\ln\left(2\cos\frac{\theta}{3^n}-1\right)$$

, avec θ appartenant à l'intervalle¿ $-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}$¿

.

a) Calculer $S_n(\theta)$, après avoir montré son existence.

b) Calculer $S(\theta)=\lim S_n(\theta)$.

c) Calculer $S'(\theta)$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta .$$

Exercice 4

1) Calculer, à l'aide d'une aire connue, l'intégrale :

$$I=\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}$$

2) En déduire la valeur chacune des intégrales :

$$J=\int_{-3}^{3} \left(x+\sqrt{9-x^2}\right) dx \text{ et } L=\int_0^3 \left(\sqrt{9-x^2}-3\right) dx$$

3) Soit

$$M=\int_0^3 \frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} dx.$$

Calculer $M+L$ et en déduire que $M=-L$.

Exercice 5

1) On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n dx$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0\leq I^n\leq\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx.$$

En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} I_n.$$

2) Montrer en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel non nul:

$$a_{n+1}=a_n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul :

$$a_n=\frac{1}{e}+(-1)^n I_n.$$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 6

Pour tout $n\geq 1$ on pose :

$$I_n=\frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}dt.$$

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$ on a :

$$I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3) En déduire par récurrence que pour tout naturel $n\geq 1$:

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!}+I_n.$$

4) Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0\leq I_n\leq\frac{1}{2^n n!}A.$$

(On pourra déterminer A en majorant sur l'intervalle $[0;1]$ la fonction : $t:\to(1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$).

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de :

$$u_n=1+\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!}.$$

Exercice 7

N désigne un entier strictement positif fixé. On se propose de calculer l'intégrale :

$$I=\int_0^\pi |\sin(nt)|.$$

Pour ceci on commence par étudier le signe de sin(nt) sur l'intervalle $[0;\pi]$

1) Soit un entier k≥0 et soit l'intervalle

$$J_k=\left[k\frac{\pi}{n},(k+1)\frac{\pi}{n}\right].$$

a) t désignant un élément de J_k, donner un encadrement du réel nt.

b) En déduire que sin(nt) garde un signe constant lorsque t décrit J_k. Préciser ce signe lorsque $k=2l$, puis lorsque $k=2l+1$ avec $l\in\in$.

c) Calculer

$$\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)|dt.$$

2) Calculer l'intégrale

$$I=\int_0^\pi |\sin(nt)|.$$

Problème 1

Pour k∈IN, on associe la fonction f_k définie sur IR par :

$$f_0=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ et\ f_k=\frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) . Soit k≥1.

a) Etudier les variations de f_k suivant les valeurs de k.

b) Etudier, suivant les valeurs de k,

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x)\ et\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f_k(x)}{x}.$$

En déduire les branches infinies de C_k en $+\infty\ et\ en -\infty$.

c) Montrer que f_k admet deux points fixes.

3) Soit $(I_k)_{k\in\in¿¿}$ la suite réelle définie par :

$$I_k=\int_0^1 f_k(x)dx$$

a) Soit F la fonction définie sur IR par

$$F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Montrer que F est une primitive de f0. En déduire la valeur de I_0.

b) Calculer I1.

c) Pour k ≥ 2, montrer que :

$$k I_k=\sqrt{2}-(k-1)I_{k-2}.$$

En déduire I_2 et I_3.

d) Etudier la limite de I_k lorsque k tend vers +∞.

4) Soit u_0 un réel tel que $0<u_0<1$. Par récurrence on construit la suite infinie $(u_n)_{n\in\in¿¿}$ définie par, pour k≠0, $u_1 = f_k(u_0)$ et $u_n = f_k(u_{n-1})$ si n≥1.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour k ≥ 2 montrer que (u_n) est majorée par une suite géométrique convergeant vers 0.

5) Pour tout k∈IN, on considère la fonction g_k de $[0;1]$ vers $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ définie par $g_k(x)=f_k(x)$ pour tout $x\epsilon[0;1]$.

a) Montrer que g_k admet une bijection réciproque g_k^{-1}.

b) Représenter graphiquement g_k^{-1} pour $k=1,2,3$.

c) Exprimer g_1^{-1} et g_2^{-1}.

Problème 2

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

Pour tout n de $¿¿$, on considère l'intégrale

$$I_n=\int_1^e (lnx)^n dx.$$

1) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $¿1,e¿$ et pour tout n entier naturel, on a :

$(lnx)^n-(lnx)^{n+1}>0.$

2) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\in¿¿}$ est décroissante.

3) Calculer I_1, à l'aide d'une intégration par parties.

4) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\epsilon ¿^{¿}$,

$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

5) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3}près par défaut.

6) Démontrer que, pour tout$n\epsilon ¿^{¿}$, $I_n\geq 0.$

7) Démontrer que, pour tout$n\epsilon ¿^{¿}$, $(n+1)I_n\leq e.$

8) En déduire la limite deI_n.

9) Déterminer la valeur de $nI_n+(I_n+I_{n+1})$en déduire la limite denI_n.

Problème 3

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I=¿$ par :

$$f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Soit a un élément non nul fixe dans I, pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a)=\int_0^a f_n(x)\,dx.$$

1) Calculer $I_0(a)$.

2) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de$¿^{¿}$on a :

$f'_n(x)=f_{n-1}(x)-f_n(x)\ et\ f_n(0)=0$

En déduire que, pour tout$n\geq 1$:

$$I_n(a)-I_{n-1}(a)=\frac{-a^n}{n!}e^{-a}.$$

3) En déduire que pour tout $n>0$,

$$I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}.$$

4) Dans cette question on pose $a=1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n\in\in¿$ par :

$$u_n=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1}=\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

On C_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal R (unité 4 cm).

a) Montrer que pour tout entier naturel n,$u_n\geq 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x\in[0;1]$:

$$f_n(x)\leq\frac{1}{n!}x^n.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)!}$$

Puis la limite de u_n.

d) Déduire enfin que

$$e=\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

Problème 4

On pose, pour$x>0$,

$$f(x)=\frac{(lnx)^2}{x}.$$

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2) Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que$f'(x)$ a le même signe que $(lnx)(2-lnx)$

Déterminer le sens de variation de f sur $¿0;+\infty¿$

3) Tracer la représentation graphique ***(C)*** de f dans le plan.

4) On pose pour $p\geq 1$,

$$I_p=\int_1^{e^2}\frac{(lnx)^p}{x^2}dx.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1=\int_1^{e^2}\frac{(lnx)}{x^2}dx.$$

b) Montrer que pour tout $p\geq 1$:

$$I_{p+1}=\frac{-2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_P.$$

c) En déduire I_2, I_3 et I_4.

d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de ***(C)***, d'abscisses comprise entre 1 et e^2. Le point M de ***(C)*** d'abscisse x décrit alors un cercle de rayon f(x). calculer le volume du solide ainsi engendré, en unité de volume.

Problème 5

Pour tout naturel non nul n, on pose :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx.$$

1) .

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Sans calculer I_n, montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante dont tous les termes sont positifs.

2) .

a) Pour tout entier naturel n, calculer la dérivée de la fonction $f:x\to\tan^{n+1}x$. En déduire que, pour tout n de $¿^{¿}$,

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n-1}.$$

b) Montrer que, pour tout n de $¿^{¿}$,

$$\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$$

.

c) En déduire la limite de la suite(I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Calculer $f(n)=I_{n+1}-I_n$en fonction de n où n ϵ $¿^{¿}$.

3) .

a) Calculer I_2.

b) Calculer $f(2)+f(6)+f(10)+\ldots+f(4k-2)$ en fonction de I_2 et I_{4k+2}, où k ∈ ¿¿.

c) En déduire la limite de la somme :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{4k-1}+\frac{1}{4k+1}$$

lorsque k tend vers +∞.

4) .

a) Vérifier que la fonction $x \to \ln(\cos x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa dérivée.

Calculer I_1.

b) Calculer

$f(1)+f(5)+f(9)+\ldots+f(4k-3)$

en fonction de I_1 et I_{4k+1}, où k ∈ ¿¿.

c) En déduire la limite de la somme :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$

lorsque k tend vers +∞.

Problème 6

Le but de ce problème est d'étudier la limite de la suite de terme général :

$$u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}(n\geq 1).$$

A) Expression de u_n à l'aide d'une intégrale

1) Calculer l'intégrale

$$J=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-1\right)dt.$$

2) On pose, pour tout $k\geq 1$:

$$K=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-1\right)cosktdt.$$

A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $K=\frac{1}{k^2}$.

3) On pose, pour tout t de $[0;\pi]$ $et\, n\geq 1$:

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+cost+\cos(2t)+\ldots+\cos(nt).$$

Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$u_n=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\,dt.$$

B) Etude de $I_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\,dt$

1) .

a) Vérifier que, pour tout réels a et b :

$$2\,sinbcosa=\sin(a+b)-\sin(a-b).$$

b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n\geq 1\, et\, t\in ¿0;\pi¿¿$:

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

c) On considère la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par :

$$g(0)=-1\, et,\, si\, t\neq 0,\, g(t)=\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Montrer que g est continue en 0.

d) Montrer que, pour tout $n\geq 1$:

$$I_n=\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

2) On pose, pour $x\in ¿0;\frac{\pi}{2}¿, h(x)=\frac{sinx}{x}$.

a) Montrer que h est dérivable sur $¿0;\frac{\pi}{2}¿$ et que $h'(x)$ est du signe de $\varphi(x)=x-tanx$.

b) Etudier le signe de $\varphi(x)$ en étudiant les variations de φ.

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur $¿0;\frac{\pi}{2}¿$

d) Pour $t\in[0;\pi]$, démontrer l'encadrement :

$$\frac{-\pi}{2}\leq g(t)\leq-\frac{1}{2}.$$

3) On pose, pour tout $n\geq 1$:

$$A_n=\int_0^{\pi}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

a) Calculer A_n.

b) Montrer que, pour tout $n\geq 1$:

$$\frac{-\pi}{2}A_n\leq I_n\leq\frac{\pi}{2}A_n.$$

c) En déduire la limite de la suite (I_n)

C) Limite de la suite (u_n)

Conclure à l'aide des questions précédentes.