# Série d'exercices : Nombres complexes

**Exercice 1**

Soit $z$ un nombre complexe distinct de 1. On pose $z = x + iy, (x, y) \in IR^2$ et $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

1) Déterminer la partie réelle $X$ et la partie imaginaire $Y$ de $Z$ en fonction de $x$ et $y$.
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z$ soit un réel.
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z$ soit un nombre imaginaire pur.

**Exercice 2**

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que :

1) $(z-1)(\overline{z}-2)$ soit un nombre réel.
2) $(z-1)(\overline{z}-2)$ soit un nombre imaginaire pur.

**Exercice 3**

On considère l'équation suivante :

$(E): \quad z^3 + (2+i)z^2 + 2(1+i)z + 2i = 0.$

1) Montrer que ($E$) admet une unique racine imaginaire pure $z_1$ que l'on précisera.
2) Déterminer les autres racines $z_2$ et $z_3$ de ($E$).

**Exercice 4**

On considère l'équation suivante :

$(E): \quad z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0.$

1) Montrer que ($E$) admet une unique racine réelle $z_1$ et unique racine imaginaire pure $z_2$ que l'on précisera.
2) Achever la résolution de ($E$).

**Exercice 5**

Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$a = 1 - i, \quad b = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5, \quad c = \dfrac{(1+i)^3}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2},$

$d = \dfrac{1 + itg\theta}{1 - itg\theta} \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi].$

**Exercice 6**

On pose $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Déterminer la forme trigonométrique de $z_1$ et de $z_2$.
2) Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique de $z_1 z_2$.
3) En déduire la valeur de $cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 7**

Par la méthode géométrique déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que :

a) $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit un imaginaire pur.

b) $\dfrac{iz+2}{z-2}$ soit un réel.

c) $arg\left[\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3\right] = 0[2\pi]$

d) $arg\left[\left(\dfrac{iz+2}{z+2i}\right)^2\right] = \dfrac{\pi}{3}[\pi].$

**Exercice 8**

Soit la suite des nombres complexes $u_1, u_2, \dots, u_n$, définie par $u_1 = 1 - i$ et $\forall p \in [2, n], u_p = u_{p-1} j$, avec $j = cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,sin\dfrac{2\pi}{3}$.

1) Vérifier que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.
2) Montrer que pour tout entier $p$ tel que $4 \leq p \leq n$ on a $u_p = u_{p-3}$. Construire les images des nombres $u_p$.
3) En déduire, suivant la forme de n, la valeur de $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ puis calculer les expressions $\sigma_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} cos\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2p\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\sigma'_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} sin\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2p\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**Exercice 9**

On note $\alpha$ et $\overline{\alpha}$ les racines de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

1) Ecrire $\alpha^n$ et $\overline{\alpha}^n$ $(n \in IN)$ sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\alpha^k + \overline{\alpha^k}\right)$.

**Exercice 10**

1) Démontrer que pour que l'équation $z^2 + bz + c = 0$ admette deux racines conjuguées, distinctes ou non, il faut que les coefficients b et c soient réels.
2) Soit l'équation $(E)\ z^2 - \alpha z + (1+i) = 0.$ où $\alpha$ est paramètre complexe.
   Montrer qu'il existe une valeur unique de $\alpha$ pour laquelle l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées. Calculer ces racines.

**Exercice 11**

Soit $\omega$ une racine nième de l'unité $(n \quad 1), \omega \neq 1$.

1) Montrer l'égalité :
   $1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \dfrac{-n}{1-\omega}.$
2) En déduire la valeur des sommes :
   $1 + 2cos\dfrac{2\pi}{17} + 3cos\dfrac{4\pi}{17} + \dots + 17cos\dfrac{32\pi}{17}$ et
   $1 + 2sin\dfrac{2\pi}{17} + 3sin\dfrac{4\pi}{17} + \dots + 17sin\dfrac{32\pi}{17}.$

**Exercice 12**

Soit x un nombre complexe distinct de 1 et z le nombre complexe égal à : $z = (x-2)\left(cos\dfrac{\pi}{4} + i\,sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1) Déterminer le module et un argument de z.

2) Démontrer que $z^{1978}$ est un nombre réel et préciser son signe.

**Exercice 13**

1) Résoudre dans C l'équation : $z^3 = 1$. (1)

Mettre les solutions de l'équation (1) sous forme trigonométrique.

2) Soit $p$ un entier naturel non nul. Résoudre dans C l'équation : $z^p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (2)
   a) Mettre les solutions de l'équation (2) sous forme trigonométrique.
   b) Les équations (1) et (2) peuvent-elles avoir des solutions communes.

**Exercice 14**

Soit u un nombre complexe, différent de – 1, de module 1 et d'argument $\theta$.

1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1-u}{1+u}$.
2) En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que $\frac{2+iz}{2-iz} = u$.
3) Résoudre dans C l'équation : $(2+iz)^5 = (2-iz)^5$.

**Exercice 15**

On considère les sommes :

$S = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ et

$S' = 1 + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

On pose $z = \cos x + i \sin x$ et l'on suppose $z \neq 1$.

1) Montrer que $S + S' = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.
2) En déduire que : $S = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ et que

$$S' = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

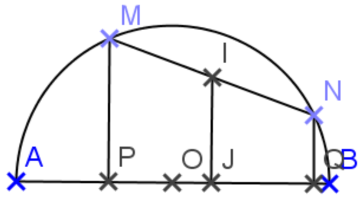
**Exercice 16**

Soit $A(z_1), B(z_2)$ et $C(z_3)$ trois points du plan complexe.

1) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1$.
2) Monter que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B si, et seulement, si $z_1 + iz_3 - (1+i)z_2 = 0$ ou $z_1 - iz_3 - (1-i)z_2 = 0$.

Exercice 17

Une corde $[MN]$ de longueur constante $L$ varie dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$ de centre $O$ et de rayon $R$ $(L < 2R)$. On note $P$, $Q$ et $J$ les projetés orthogonaux de $M$, $N$ et $I$ sur $(AB)$ où I est le milieu de $[MN]$.




1) Montrer que le triangle $IPQ$ est isocèle en $I$.
2) On note $\theta = \widehat{BON}$ et $\alpha = \widehat{NOM}$.
   a) Montrer que $\alpha$ est constant lorsque la corde $[MN]$ varie.
   b) Dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec $\overrightarrow{OB} = R\vec{i}$, déterminer les coordonnées des points $M$, $N$ et $I$ en fonction de $R$, $\theta$ et $\alpha$.
   c) En déduire que $\tan \widehat{IPQ} = \frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta + \cos(\theta+\alpha)}$.
3) Montrer que les angles du triangle $IPQ$ sont constants lorsque la corde $[MN]$ varie.

**Bon courage !**