Lycée de Matam Année 2008/2009

TS1 M.NDOYE

Problèmes sur les intégrales

Problème 1

Pour k∈IN, on associe la fonction f_k définie sur IR par :

$$f_0=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ et\ f_k=\frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) . Soit k≥1.

a) Etudier les variations de f_k suivant les valeurs de k.

b) Etudier, suivant les valeurs de k,

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x)\ et\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f_k(x)}{x}.$$

En déduire les branches infinies de C_k en $+\infty\ et\ en -\infty$.

c) Montrer que f_k admet deux points fixes.

3) Soit $(I_k)_{k\in\in¿¿}$ la suite réelle définie par :

$$I_k=\int_0^1 f_k(x)\,dx$$

a) Soit F la fonction définie sur IR par

$$F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Montrer que F est une primitive de f0. En déduire la valeur de I_0.

b) Calculer I1.

c) Pour k ≥ 2, montrer que :

$$k\,I_k=\sqrt{2}-(k-1)I_{k-2}.$$

En déduire I_2 et I_3.

d) Etudier la limite de I_k lorsque k tend vers +∞.

4) Soit u_0 un réel tel que $0<u_0<1$. Par récurrence on construit la suite infinie $(u_n)_{n\in\in¿¿}$ définie par, pour k≠0, $u_1 = f_k(u_0)$ et $u_n = f_k(u_{n-1})$ si n≥1.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour k ≥ 2 montrer que (u_n) est majorée par une suite géométrique convergeant vers 0.

5) Pour tout k∈IN, on considère la fonction g_k de $[0;1]$ vers $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ définie par $g_k(x)=f_k(x)$ pour tout $x\in[0;1]$.

a) Montrer que g_k admet une bijection réciproque g_k^{-1}.

b) Représenter graphiquement g_k^{-1} pour $k=1,2,3$.

c) Exprimer g_1^{-1} et g_2^{-1}.

Problème 2

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

Pour tout n de $¿¿$, on considère l'intégrale

$$I_n=\int_1^e (lnx)^n\,dx.$$

1) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $¿1,e¿$ et pour tout n entier naturel, on a :

$$(lnx)^n-(lnx)^{n+1}>0.$$

2) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\in¿¿}$ est décroissante.

3) Calculer I_1, à l'aide d'une intégration par parties.

4) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\epsilon¿¿$,

$$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$$

5) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

6) Démontrer que, pour tout $n\epsilon¿¿$, $I_n\geq 0$.

7) Démontrer que, pour tout $n\epsilon¿¿$, $(n+1)I_n\leq e$.

8) En déduire la limite de I_n.

9) Déterminer la valeur de $n\,I_n+(I_n+I_{n+1})$ en déduire la limite de $n\,I_n$.

Problème 3

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I=¿$ par :

$$f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Soit a un élément non nul fixe dans I, pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a)=\int_0^a f_n(x)\,dx.$$

1) Calculer $I_0(a)$.

2) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $¿¿$ on a :

$$f'_n(x)=f_{n-1}(x)-f_n(x)\ et\ f_n(0)=0$$

En déduire que, pour tout $n\geq 1$:

$$I_n(a)-I_{n-1}(a)=\frac{-a^n}{n!}e^{-a}.$$

3) En déduire que pour tout $n>0$,

$$I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}.$$

4) Dans cette question on pose $a=1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n\in\in¿$ par :

$$u_n=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1}=\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

On C_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal R (unité 4 cm).

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n\geq 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x\in[0;1]$:

$$f_n(x)\leq\frac{1}{n!}x^n.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)!}$$

Puis la limite de u_n.

d) Déduire enfin que

$$e=\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

Problème 4

On pose, pour $x>0$,

$$f(x)=\frac{(lnx)^2}{x}.$$

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2) Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(lnx)(2-lnx)$

Déterminer le sens de variation de f sur $¿0;+\infty¿$

3) Tracer la représentation graphique ***(C)*** de f dans le plan.

4) On pose pour $p\geq 1$,

$$I_p=\int_1^{e^2}\frac{(lnx)^p}{x^2}dx.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1=\int_1^{e^2}\frac{(lnx)}{x^2}dx.$$

b) Montrer que pour tout $p\geq 1$:

$$I_{p+1}=\frac{-2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_P.$$

c) En déduire I_2, I_3 et I_4.

d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de ***(C)***, d'abscisses comprise entre 1 et e^2. Le point M de ***(C)*** d'abscisse x décrit alors un cercle de rayon f(x). calculer le volume du solide ainsi engendré, en unité de volume.

<u>Problème 5</u>

Pour tout naturel non nul n, on pose :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx.$$

1) .

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Sans calculer I_n, montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante dont tous les termes sont positifs.

2) .

a) Pour tout entier naturel n, calculer la dérivée de la fonction $f:x\to\tan^{n+1}x$. En déduire que, pour tout n de ¿,

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n-1}.$$

b) Montrer que, pour tout n de ¿ ,

$$\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$$

.

c) En déduire la limite de la suite(I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Calculer $f(n)=I_{n+1}-I_n$ en fonction de n où n ∈ ¿.

3) .

a) Calculer I_2.

b) Calculer $f(2)+f(6)+f(10)+\ldots+f(4k-2)$ en fonction de I_2 et I_{4k+2}, où k ∈ ¿.

c) En déduire la limite de la somme :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{4k-1}+\frac{1}{4k+1}$$

lorsque k tend vers $+\infty$.

4) .

a) Vérifier que la fonction $x\to\ln(\cos x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa dérivée.

Calculer I_1.

b) Calculer

$f(1)+f(5)+f(9)+\ldots+f(4k-3)$

en fonction de I_1 et $I_{4k+1,}$ où k ∈ ¿.

c) En déduire la limite de la somme :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$

lorsque k tend vers $+\infty$.

<u>Problème 6</u>

Le but de ce problème est d'étudier la limite de la suite de terme général :

$$u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}(n\geq 1).$$

A) Expression de u_n à l'aide d'une intégrale

1) Calculer l'intégrale

$$J=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-1\right)dt.$$

2) On pose, pour tout $k\geq 1$:

$$K=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-1\right)cosktdt.$$

A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $K=\frac{1}{k^2}$.

3) On pose, pour tout t de $[0;\pi]$ $et\, n\geq 1$:

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+cost+\cos(2t)+\ldots+\cos(nt).$$

Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$u_n=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)dt.$$

B) Etude de $I_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)dt$

1) .

a) Vérifier que, pour tout réels a et b :

$$2\,sinbcosa=\sin(a+b)-\sin(a-b).$$

b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que pour tout

$n\geq 1\, et\, t\in ¿0;\pi¿¿$:

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

c) On considère la fonction g définie sur $[0;\pi]$par :

$$g(0)=-1et\,,si\,t\neq 0\,,g(t)=\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Montrer que g est continue en 0.

d) Montrer que, pour tout $n\geq 1:$

$$I_n=\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

2) On pose, pour$x\in ¿0;\frac{\pi}{2}¿, h(x)=\frac{sinx}{x}.$

a) Montrer que h est dérivable sur$¿0;\frac{\pi}{2}¿$ et que $h'(x)$ est du signe de $\varphi(x)=x-tanx.$

b) Etudier le signe de $\varphi(x)$ en étudiant les variations de φ.

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur

$¿0;\frac{\pi}{2}¿$

d) Pour $t\in[0;\pi]$, démontrer l'encadrement :

$$\frac{-\pi}{2}\leq g(t)\leq -\frac{1}{2}.$$

3) On pose, pour tout $n\geq 1:$

$$A_n=\int_0^{\pi}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

a) Calculer A_n.

b) Montrer que, pour tout $n\geq 1:$

$$\frac{-\pi}{2}A_n\leq I_n\leq\frac{\pi}{2}A_n.$$

c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{□}$

C) Limite de la suite (u_n)

Conclure à l'aide des questions précédentes.