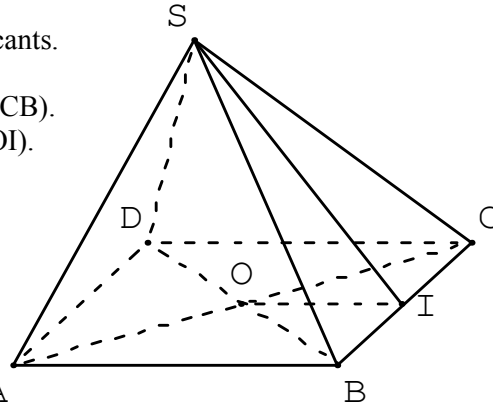


## Géométrie dans l'espace

**Exercice 1 :** SABCD est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de [SA], N est le point de [SC] tel que  $SN = SC$ . O est le centre de ABCD. (SO) est donc la hauteur de la pyramide. I est le milieu de l'arête [BC].

1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.
2. Placer le point d'intersection de (MN) et (AC).
3. Démontrer que (SO) est orthogonale à la droite (CB).
4. En déduire que (CB) est orthogonale au plan (SOI).



**Exercice 3 :** ABCD est un tétraèdre.

1. G est le barycentre des points pondérés (A ;1) , (B ;1) , (C ;2) , (D ;1). Préciser la position de G.
2. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. Les points E , F et H sont définis par :  
 $\vec{AE} = a\vec{AB}$  ;  $\vec{BF} = a\vec{BC}$  et H milieu du segment [EF]
  - a. Vérifier que F est le barycentre (B ;1-a) et (C ;a), et que E est barycentre de (A ;1-a) et (D ;a)
  - b. En utilisant l'associativité du barycentre montrer que H est barycentre des points pondérées (A ;1-a) , (B ;1-a) , (C ;a) et (D ;a).
  - c. En déduire que les points I, J et H sont alignés

**Exercice 4 :** L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) et (D') dans les cas suivants :
  - a. (D) passe par A(-2 ; 3 ; 5) et B(2 ; 1 ; 3)
  - b. (D') passe par C(1 ; 2 ; 3) et parallèle à (EF) avec E(0 ; 2 ; 3) et F(-1 ; 2 ; 1).
2. Déterminer l'intersection des droites (D) et (D') (s'il existe.)
3. Calculer les coordonnées G du barycentre de (A ; 2) ; (B ; 1) ; (E ; -3) et (F ; 4)

**Exercice 5 :** L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) et (D') dans les cas suivants :
  - a. (D) passe par A(1 ; 2 ; 3) et de vecteur directeur  $\vec{U}(-1 ; 3 ; 5)$ .
  - b. (D') passe par C(0 ; 1 ; 4) et de vecteur directeur  $\vec{V}(-1 ; -1 ; 1)$ .
2. Quelle est la position relative des droites (D) et (D'). Soit  $\{F\} = (D) \cap (D')$
3. Calculer les coordonnées G du barycentre de (A ; 2) ; (C ; 1) ; (F ; -4).
4. Trouver une représentation paramétrique puis cartésienne du plan définie par (D) et (D').

**Exercice 6** L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

(D) est la droite passe par A(1 ; -3 ; 2) et de vecteur directeur  $\vec{U}(2 ; 1 ; 3)$ .

(P) est le plan d'équation :  $2x - y + 5z + 4 = 0$ .

1. La droite (D) et le plan (P) sont-ils parallèles ?
2. Trouver les coordonnées du point d'intersection de (D) et (P).
3. Donner une équation de la sphère ( $\Omega$ ) de centre A et passant par l'origine du repère.
4. Quelle est l'équation de la tangente (T) passant par O de ce sphère ?
5. Déterminer l'intersection de la sphère ( $\Omega$ ) et du plan (P).

**Exercice 7 :** L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . Les points A ; B ; C sont définies par :  $\vec{OA} = 2\vec{i}$  ;  $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}$  ;  $\vec{OC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

1. Montrer que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires.
2. a. Déterminer les équations des plans médiateurs des segments : [OA] ; [OB] et [OC].  
b. Dédurre le centre de la sphère circonscrit au tétraèdre OABC et le rayon de la sphère.

**Exercice 8 :** Soit A et B et C deux points de l'espace tels que  $AB = 8$  ;  $BC = 6$  et  $AC = 5$ . Déterminer et construire dans chacun des cas l'ensemble des points M de l'espace tel que :

- a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -12$  ; b.  $\vec{BM} \cdot \vec{AM} = -12$  ; c.  $(\vec{MA} + 2\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MB})$  ; d.  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 2\vec{MA} \cdot \vec{MC}$
- e.  $(\vec{MA} + 2\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - \vec{MB})$  ; f.  $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$  ; g.

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{3}{2} \|\vec{MA} + \vec{MB}\|.$$

**Exercice 9** L'espace est orienté et muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points A, B, C de l'espace de coordonnées respectives dans ce repère :

$$A(2; 0; 0) ; B(1; 3; 0) ; C(1; 1; 2)$$

Soit le triangle  $M_1M_2M_3$  défini par :  $\vec{OM}_1 = a\vec{OA}$  ;  $\vec{OM}_2 = b\vec{OB}$  ;  $\vec{OM}_3 = c\vec{OC}$  où a, b, c sont trois nombres réels de l'intervalle  $[0; 1]$ .

Le but de l'exercice est de déterminer, parmi les triangles  $M_1M_2M_3$ , un triangle d'aire maximale.

1. Faites une figure.
2. On pose :  $\vec{S}_1 = \frac{1}{2} \vec{OB} \wedge \vec{OC}$  ;  $\vec{S}_2 = \frac{1}{2} \vec{OC} \wedge \vec{OA}$  ;  $\vec{S}_3 = \frac{1}{2} \vec{OA} \wedge \vec{OB}$  ;  $\vec{S}_4 = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ 
  - a. Calculer les coordonnées de ces quatre vecteurs ainsi que leurs normes. On note S la plus grande de ces normes. Prouver l'égalité :  $\vec{S}_4 - \vec{S}_1 - \vec{S}_2 - \vec{S}_3 = \vec{0}$
  - b. On pose  $\vec{T} = \frac{1}{2} \vec{M_1M_2} \wedge \vec{M_1M_3}$  interpréter géométriquement la norme de  $\vec{T}$
  - c. Prouver l'égalité :  $bc\vec{S}_1 + ca\vec{S}_2 + ab\vec{S}_3 = \vec{T}$  Montrer aussi que  $\vec{T}$  s'écrit sous la forme  $\vec{T} = (bc - x)\vec{S}_1 + (ca - x)\vec{S}_2 + (sc - x)\vec{S}_3 + x\vec{S}_4$  où x un réel quelconque.
3. On suppose  $a \leq c$  et  $b \leq c$ . En choisissant  $x = ab$ , prouver l'inégalité.

$$\|\vec{T}\| \leq (bc + ca - ab)S$$

Dédurrez de l'inégalité  $bc + ca - ab = c^2 - (c - b)(c - a)$  que  $0 \leq (bc + ca - ab) \leq 1$  puis l'inégalité  $\|\vec{T}\| \leq S$ .

4. Préciser, parmi les triangles  $M_1M_2M_3$ , un triangle dont l'aire est maximale.

### Exercice 8

Le plan P est du repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . on considère les points d'affixes

$$A(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \quad M(z) \quad \text{et} \quad N\left(\frac{1}{z}\right); \quad z \neq 0 \quad \text{et} \quad z = re^{i\theta}$$

- 1) P désigne le barycentre du système  $\{(M; 2), (N; 2)\}$  Exprimer les coordonnées de P en fonction de r et de  $\theta$ .

- 2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon OA alors P décrit une courbe (E) dont on donnera l'équation
- 3) Tracer cette courbe et préciser ses sommets
- 4) Soit f l'affinité orthogonale de rapport  $k$  ( $k > 0$ ) et d'axe  $(O; v)$  Déterminer  $k$  pour que l'image de la courbe (E) soit un cercle (G) dont on déterminera le centre et le rayon.

**Exercice 9**

Le plan P est du repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère l'ensemble (E) des points

$$M \text{ de } P \text{ de coordonnées } (x, y) \text{ vérifiant : } \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Montrer que le lieu de M est une conique (C) dont on précisera les éléments caractéristiques. Représenter (C)

**Exercice 10**

Le plan P est du repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $M(z)$  on associe le point  $M'(z')$

définie par  $z' = z - \frac{1}{z}$  avec  $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0$ )

- 1) Calculer les coordonnées de  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $r$  et  $\theta$
- 2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon  $r = 2$  alors  $M'$  décrit une ellipse (E)
- 3) Déterminer les sommets et les foyers de (E) puis représenter (E).

**Exercice 11**

Soit  $\theta$  un réel appartenant à l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ . On considère l'équation (E) d'inconnue complexe  $z$  :  $(E) (\cos^2 \theta)z^2 - 4(\cos \theta)z + 5 - \cos^2 \theta = 0$ .

1. Résoudre (E) dans C. Préciser pour quelle valeur de  $\theta$  l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.
2. Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal. On appelle  $M'$  et  $M''$  les points de P dont les affixes respectifs sont les nombres  $z'$  et  $z''$  solutions de (E)

Montrer que, lorsque  $\theta$  varie  $M'$  et  $M''$  se déplacent sur une hyperbole (H). Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).

3. Montrer que lorsque  $\theta$  décrit l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  l'ensemble (F) décrit par les points  $M'$  et  $M''$  est une branche de (H).

**Exercice 12**

Soit AOB un triangle équilatéral du plan orienté tel que :  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

On note H le milieu de [AB], I celui de [OB] et ( $\Delta$ ) la médiatrice de [AB]. On note s la similitude plane directe de centre O transformant le point A en I.

M désigne un point quelconque du plan et  $M'$  son image par s.

1. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.  
b. Construire le point C du plan tel que  $s(C) = A$ . (On justifiera la construction).  
c. Exprimer  $AM'$  en fonction de CM.

2. On note  $M''$  l'image de  $M$  par la réflexion d'axe  $(\Delta)$ . On se propose de déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  du plan tels que  $A$  est équidistant de  $M'$  et  $M''$ .

a. montrer que  $AM'' = BM$ .

b. Montrer que  $M$  appartient à  $(\Gamma)$  si et seulement si  $CM = 2BM$ .

c. Déterminer la nature de  $(\Gamma)$  puis construire  $(\Gamma)$ .

### Exercice 13

Le plan  $P$  est du repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  de  $P$  de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant l'équation :  $25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$  (1)

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que  $(E)$  est une conique de foyer  $O$  et de directrice  $(\Delta)$  d'équation  $x = \frac{16}{3}$ . Donner la nature et l'excentricité de  $(E)$ .

Dans toute la suite de l'exercice,  $M$  désigne un point de  $(E)$  et  $\theta$  une détermination de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .

a. Dédurre de l'équation (1) une relation du premier degré entre  $OM$  et l'abscisse  $x$  de  $M$ .

b. Démontrer que  $OM = \frac{16}{5 + 3 \cos \theta}$ .

3. On suppose que  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ . La droite  $(OM)$  coupe  $(\Delta)$  en  $I$  et recoupe  $(E)$  en  $M'$ .

a. Démontrer que  $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$  est une constante indépendante de  $M$ .

b. Démontrer que  $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$

### Exercice 14

$FGH$  est un triangle équilatéral de côté  $l$ . Soit  $(H)$  l'hyperbole de foyer  $F$ , de directrice  $(GH)$  et d'excentricité 2.

1) Déterminer les sommets  $S$  et  $S'$  de cette hyperbole (on remarquera  $S$  et  $S'$  sont sur la hauteur issue du sommet issue de  $F$  dans le triangle  $FGH$ ) son centre  $O$  et le deuxième foyer en fonction de  $F$ . Calculer en fonction de  $l$ , la distance des deux sommets  $2a$  et la distance des deux foyers

2) On choisit le repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Où  $O$  est le centre de l'hyperbole et  $u$  un vecteur directeur de la demi droite  $[OF)$ ; Ecrire une équation de  $(H)$  et donner l'allure de  $(H)$ .

## Courbes paramétrées

### Exercice 1

Soit  $(\Gamma)$  la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

1) Montrer que  $(\Gamma)$  est un cercle

2) Représenter  $(\Gamma)$

### Exercice 2 (Cardioïde)

Le plan est du repère orthonormal direct  $(O, i, j)$ .

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1) En utilisant la parité et la périodicité des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  réduisez l'intervalle d'étude et déterminer les symétries de la courbe (C)
- 2) Etudier les variations des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$
- 3) a) Montrer que, si  $t \neq \pi$ , la droite  $OM_t$  a pour vecteur directeur  $u = (\cos t)i + (\sin t)j$ .  
b) Déduisez en la tangente au point  $M(\pi)$  de la courbe (C) puis tracer (C).

### **Exercice 3 (Spiral logarithmique)**

Soit ( $\Psi$ ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1) Par quelle transformation passe-t-on de  $M(t)$  à  $M(t + 2\pi)$  et à  $M(t - 2\pi)$
- 2) Etudier les variations  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  pour  $t \in [0; 2\pi]$
- 3) Construire la courbe représentative de ( $\Psi$ ) constituée des points  $M(t)$  pour  $t \in [0; 2\pi]$
- 4) Déduisez-en la partie de la courbe de ( $\Psi$ ) constituée des points  $M(t)$  pour  $t \in [-2\pi; 2\pi]$

### **Exercice 4 (courbe de lissajou)**

Soit ( $\varphi$ ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1) Déterminer l'intervalle d'étude utile.
- 2) Etudier les variations de  $x(t)$  ;  $y(t)$
- 3) Montrer que la courbe est inscrite dans un carré de côté 2
- 4) Déterminer les points de contact avec ce carré et les tangentes en ces points.
- 5) Tracer la courbe ( $\varphi$ ).

### **Exercice 5 (cyloïde)**

Soit ( $\Phi$ ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = R(1 - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1) Comparer les coordonnées des points  $M(t)$  et  $M(t + 2\pi)$  et montrer que ces points correspondent dans une translation. Déduisez en l'intervalle d'étude utile
- 2) Etudier les variations de  $x(t)$  ;  $y(t)$  et calculer le vecteur dérivée  $V(t)$
- 3) On suppose ici que  $t$  est non nul, montrer que la droite ( $OM_t$ ) admet un vecteur directeur  $u(t) = \frac{1}{t}(1 - \cos t)i + \frac{1}{t}(\sin t)j$ . déterminer les limites des coordonnées de  $u$  et déduisez en la tangente en O à la courbe ( $\Phi$ )

**Exercice 6**

Le plan est du repère orthonormal direct  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ . On considère le cercle C de centre I et de rayon 1 et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $x = 1$ . Une droite variable (D) passant par O, coupe le cercle C en A. et la droite  $(\Delta)$  en A'.

On note M le point de (D) tel que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA'}$ .

La courbe S, lieu des points M lorsque la droite (D) varie, est appelée Strophoïde droite.

1) On note t la pente de la droite (D).

Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2) a. Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b. Etudier les variations des fonctions  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  pour  $t \in [0, +\infty[$ , et construire la courbe S.

3) Calculer la distance de M à la droite  $(\Delta)$ , puis la limite de cette distance lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Interpréter graphiquement.