Série d'exercices : similitudes directes

Exercice 1

Soient, dans le plan complexe P, deux points M et M' d'affixes respectives z et z' tels que l'on ait :
$z' = (1 + i) z + 1$

1°) Calculer le module et un argumentde$1 + i$.

2°) Déterminer les éléments géométriques de la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $(1 + i) z + 1$.

3°) Déterminer l'ensemble des M du plan complexe tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ aient la même norme.

Exercice 2

Dans le plan complexe soit *ƒ* la similitude qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 - i)z + 2i$

1°) Déterminer le rapport, l'angle et le centre ƒ.

2°) soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$,les formes algébriques des nombres complexe z et z'. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3°) Quelle est l'image par ƒ de la droite d'équation $x + 2y - 1 = 0$?

4°) Quelle est l'image par ƒ du cercle (C) de centre le point d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$?

Exercice 3

Soit ƒ la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = 2(1 + i\sqrt{3})z + 3$.

1°) Quelle est la nature de ƒ? Préciser ses éléments caractéristiques.

2°) Soit D, droite d'équation : $x - y\sqrt{3} = 0$. Quelle est l'équation de l'image ƒ(D) de D?

3°) Quelle est l'image par ƒ du cercle de rayon 2 dont le centre est le point I(2i) ?

Exercice 4

Dans plan complexe, soit ƒ la transformation qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = (1 + i\sqrt{3}) z + \sqrt{3}(1 - i)$.

1°) démontrer que ƒ admet un unique point invariable I ; déterminer l'affixe de I.
Caractériser géométriquement ƒ.

2°) Soit G le barycentre des points I, M, M'affectés respectivement les coefficients 3, 2, 1. Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M.

3°) On suppose que le point M décrit la droite d'équation : $y = x$.
Quel l'ensemble décrit par le point G?

Exercice 5

Soit b un nombre complexe. Soit ƒ l'application de C dans C définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$ $f(z) = (1 + 3i) z + b$.
soit F l'application du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe ƒ (z)

1°) Déterminer b pour que le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit invariant par F.

2°) Déterminer les éléments géométriques de F.

Exercice 6

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives :
1 + 3i et 2i.

1°) Soit S la similitude plane directe de centre B qui transforme O en A. On note z' l'affixe du point M' transformé par S du point M d'affixe z.

a) Calculer le module et un argument du nombre complexe affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Calculer l'angle et le rapport de la similitude S.

c) Exprimer z' en fonction de z.

2°) Soit T la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'' d'affixe $z'' = iz + 3$.
Donner la nature de T en précisant ses éléments caractéristiques. On note Ω le point invariant par la transformation T.

3°) Montrer que les points A, Ω, B sont les sommets d'un triangle isocèle.

Exercice 7

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment $[BC]$. Les triangles BAB' et CAC' sont rectangles isocèles de sommet A et extérieurs à ABC. Le but de l'exercice est de est de montrer que les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.

1) Méthode géométrique
   a) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminer les images des points A et M par h. Trouver une rotation r telle que roh transforme A en B' et M en C'.
   b) En déduire que les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.
2) Utilisation des nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.
   a) Quelles sont les affixes m, b', c' des points M', B', C ?
   b) Retrouver les résultats du 1).b).

Exercice 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, A′, B et B′ d'affixes respectives : $z_A = 1-2i$, $z_{A'} = -2+4i$, $z_B = 3-i$, $z_{B'} = 5i$.

1. a. Placer les points A, A′, B et B′ dans le plan complexe. Monter que ABB′A′ est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que s(A)=A′ et s(B)=B′. On note (Δ) son axe.

Donner une équation de la droite (.) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z. Montrer que $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2i - 1.$

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par : $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i.$

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe 1+i et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport −2.

Montrer que C et D sont les images respectives de A′ et B′ par h.

c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f.

b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Exercice 9

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.

Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $B_{n+1} = S(B_n)$.

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.

3. On définit la suite (ln) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.

a. Montrer que la suite (ln) est une suite géométrique et préciser sa raison.

b. Exprimer l_n en fonction de n et de l_0.

c. On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$. Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a. Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.

b. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0).

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n appartient-il à Δ?