Lycée El Hadji Omar Lamine BADJI **M. FALL**
Année scolaire : 2008/09
TS1

Série n°4 : Suites numériques

Exercice 1

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \; ;$$
2) En utilisant les propriétés des suites géométriques ; calculer les sommes suivantes
$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-1}{2^n} \quad ; \quad T(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, x^n \quad ; \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)^2 ; x \in \mathbb{R}^*$$

Exercice 2

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$; On se propose de démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x, il existe des réels $a_n \, et \, b_n$ et un polynôme g_n à coefficients réels tel que $x^n = g_n(x).f(x) + a_n x + b_n$

1) Déterminer a_i, b_i, g_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$
2) Démontrer par récurrence l' existence des réels $a_n \, et \, b_n$ et du polynôme g_n pour tout naturel n
3) Etablir que pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 3a_n + b_n$; $a_n + b_n = 1$ et $b_{n+1} = -2a_n$
4) Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + a_n$ est géométrique. Déduisez- en les expressions de $a_n \, et \, b_n$ en fonction de n.

Exercice 3

La suite numérique (u_n) est définie par $u_n = u_{n-1} + (-1)^{n+1}$ et $u_0 = 0$

1) Calculer u_i pour $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ puis représenter les points $P_i(i; u_i)$ dans un ROND
2) Démontrer que pour tout entier naturel n, les suites définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont arithmétiques ; calculer le terme général de v_n et w_n. Puis vérifier que : $u_{2n-1} = u_{2n}$
3) On désigne par (D) l' ensemble des points $P_n(n; u_n)$ lorsque n décrit l'ensemble IN. Démontrer que (D) est inclus dans la réunion de deux droites (D_1) et (D_2) dont on donnera les équations cartésiennes et que vous dessinerez. Que peut –on dire sur la limite de (u_n) ?

Exercice 4

1°) Etudier la convergence des suites suivantes :

a) $v_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$; b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ (démontrer que $w_n \quad \sqrt{\dfrac{n}{2}}$)

c) $a_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2 + p}$; d) $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^p}$; (On montrera que $p^p \quad 2^p \quad \forall p \quad 2$)

e) $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}$; f) $u_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$; k) $b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

Exercice 5

La suite numérique (u_n) est définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{5}{4}u_n(1-u_n)$

1) Représenter graphiquement la fonction $f(x) = \frac{5}{4}x(1-x)$
2) Montrons que f(I) est inclus dans I
3) Résoudre dans IR l' équation f(x) = x . soit x la valeur dans l' intervalle I.
4) Montrer que pour tout $x \in I$; $|f'(x)| \le \frac{5}{8}$
5) Montrer que $\forall n \quad 1, |u_{n+1}-l| \le \frac{5}{8}|u_n - l|$
6) Montrer que $\forall n \quad 1, |u_{n+1}-l| \le \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}|u_0 - l|$. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur un intervalle I vérifiant f(I) inclus dans I. On considère la suite (u_n) définie par : u_0 fixé et pour tout naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Démontrer que si f est croissante alors la suite (u_n) est convergente
2) Démontrer que si f est décroissantes alors les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et convergentes .
3) Utiliser les résultats précédents pour étudier la convergence des suites suivantes

   a) $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{1+u_n}$; b) $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$; c) $u_{n+1} = (1-u_n)^2$; d) $u_{n+1} = 1+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{u_n}\right)$

Exercice 7

Soit une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + p(n)$ où p est une fonction polynôme

a) Démontrer que pour tout naturel n on a : $u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n} p(k)$
b) Application : trouver un polynôme du troisième degré tel que : $u_{n+1} - u_n = n^2$ puis calculer $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}$ pour n non nul

1) Montrer que pour tout x positif et non nul on a : $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$

2) En déduire que $\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^6}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right) \le u_n \le \frac{n+1}{2n}$

3) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}k^3 \le n^4$ pour tout entier naturel non nul. Déduisez une nouvelle encadrement de u_n et la convergence de (u_n) .

Exercice 9