Académie de Matam — SÉRIE D'EXERCICE — Année : 06/07
Lycée de Matam — TRANSFORMATIONS DANS L'ESPACE — Classe : TS_1
M° TOURE

Exercice : I

Dans l'espace orienté rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application affine f de l'espace (ξ) dans lui-même définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$$

1) Démontrer que f est une rotation ; préciser son axe et une mesure de son angle.
2) On considère les quatre points A(2, 0, 0), B(- 1, $\sqrt{3}$, 0), C(- 1, - $\sqrt{3}$, 0) et D(0, 0, 4) et on pose $\mathcal{F}$ = {A, B, C, D}
   a) Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O.
   b) Vérifier que f laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.
3) Soit g une isométrie qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.
   a) Déterminer l'isobarycentre G de A, B, C et D. Calculer $\|\overrightarrow{GA}\|$, $\|\overrightarrow{GB}\|$, $\|\overrightarrow{GC}\|$ et $\|\overrightarrow{GD}\|$.
   b) En déduire que g laisse invariant G et D.
   c) En déduire l'ensemble $(\mathcal{J})$ des isométries de (ξ) qui laissent $\mathcal{F}$ globalement invariant.

Exercice : II

Soit α un nombre réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$. On désigne par f_α l'application affine de l'espace (ξ) dans lui-même définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2 - 2\cos\alpha - 4\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + 4 + 2\sin\alpha - 4\cos\alpha \\ z' = z \end{cases}$$

Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de f_α ?

Exercice : III

Dans l'espace orienté rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application affine f de l'espace (ξ) dans lui-même définie analytiquement par :

$$\begin{cases} 5x' = 3x + 4z - 2 \\ y' = -y + 2 \\ 5z' = 4x - 3z + 4 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une rotation ; quel est son axe ?
2) Déterminer $f \circ f$. en déduire une mesure de l'angle de f.

Exercice : IV

Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes de l'espace (ξ). On note par s la demi tour d'axe $(\mathcal{D})$ et par s' la demi tour d'axe $(\mathcal{D}')$. Quelle est la nature de $s \circ s'$?

Exercice : VI

On considère quatre points A, B, C et D de (ξ) et une sphère $(\mathcal{S})$ de centre O et de rayon R.
Pour tout point M de $(\mathcal{S})$ on note M' le point de (ξ) tel que :
$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

Exercice : VII

On considère dans l'espace quatre points A, B, C et D tels que:
AC = AB = BC = BD = AD = a (a réel positif donné).
1) a) I étant le milieu du segment [AB], montrer que les droites (IC) et (ID) sont perpendiculaires à la droite (AB).

b) Montrer que IC = ID ; exprimer cette longueur en fonction de a.

2) Soit S_1 réflexion de plan (ABC) et S_2 réflexion de plan (ABD).

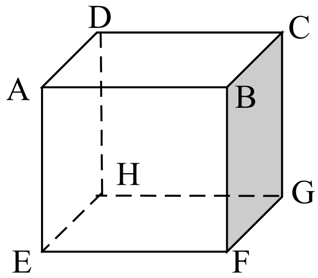
a) Quelle est la nature de la transformation $R = S_1 \circ S_2$?

b) Déterminer en fonction de a la longueur x = CD pour que R soit une rotation d'angle plat.

<u>Exercice : VIII</u>

ABCDEFGH est le cube ci – dessous représenté.

O est son centre, I est le milieu de [AB], J le centre de gravité de la face DCGH.



1) a) Montrer que (ABC) est le plan médiateur des segments [ED] et [FC] ;

b) On note par S_1, S_2 et S_3 les réflexions de base respectives (ABG), (BCH) et (IOJ). Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube ABCDEFGH.

2) On considère l'application f telle que $f = S_1 \circ S_2$.

a) Prouver que f est une rotation d'axe (BH).

b) En orientant le plan (ACF) par $\overrightarrow{BH}$ déterminer la restriction de f à ce plan. En déduire l'angle de f.

3) Soit r le demi – tour d'axe (OI) et g l'application $r \circ f$.

a) En écrivant r comme la composée de 2 réflexions judicieusement choisies déterminer la nature de g.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de g.

<u>Exercice : IX</u> (mouvement hélicoïdal ou hélice circulaire)

Dans l'espace orienté rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la courbe (H) de l'espace (ξ) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = \omega\lambda R t \end{cases} \quad , (R > 0, \lambda \neq 0, \omega \neq 0, t \in IR).$$

1) Soit m(t) le projeté orthogonale de M(t) sur le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est la nature du mouvement de m(t) ?

2) Soit m'(t) le projeté orthogonale de M(t) sur la droite de repère $(O, \vec{k})$. Quelle est la nature du mouvement de m'(t) ?

3) Si M'désigne le point de paramètre (t + 2π). Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est vecteur constant. La norme de ce vecteur constant est appelée le **pas** de l'hélice.

4) Soit $\vec{V}(t)$ le vecteur vitesse instantanée du mouvement.

a) Déterminer $\|\vec{V}(t)\|$ et $\vec{k} \cdot \vec{V}(t)$.

b) En déduire que l'angle entre la tangente en un point M quelconque de (H), et d'une génératrice du cylindre est constant, indépendant de M.