Transformations de l'espace

Exercice1 :
Soit $ABCDEFGH$ un cube. Déterminer les coordonnées des points dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ des images des points $C, F, G\ et\ H$ par chacun des transformations suivantes

1. translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$
2. translation de vecteur $\overrightarrow{BH}$
3. homothétie de centre A et de rapport -2
4. homothétie de centre Fet de rapport $\frac{1}{2}$

Exercice 2
1) Dans l'espace, on considère un tétraèdre$ABCD$. Pour tout réel k on définit l'application f_k de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}$. Préciser suivant la valeur de$k$, la nature de l'application f_k et les éléments permettant de la définir
2) Soit les points $A(1;-2;1)$; $B(-1;2;0)$ et $A'(0;1;1)$ et $B'(4;-3;-1)$.
Démontrer qu'il existe une homothétie $h$dont on précisera le centre Φet le rapport$k$, telle que : $h(A)=A'\ et\ h(B)=B'$. Déterminer l'image du point O par$h$.

Exercice 3
1) Soit Ωune sphère de centre Oet de rayon r et $A\in\Omega$. Déterminer le lieu de symétrique de Apar rapport aux points de la sphère.
2) Déterminer les plans et axes de symétrie du cube $ABCDEFGH$ de centre$O$.
3) Déterminer les plans et axes de symétries du pyramide régulier dont la base $ABCD$ est un carré de centre I.

Exercice 4
1) Soit (Π) le plan d'équation :$2x-y+z=1$. Déterminer l'expression analytique de la réflexion S_Π
2) soit f l'application de l'espace dans lui – même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(-x-2y-2z+6) \\ y'=\frac{1}{3}(-x-2y+2z-6) \\ z'=\frac{1}{3}(-2x+2y-z+12) \end{cases}$$

Démontrer que f est un demi-tour dont on précisera l'axe de la rotation(Δ).

Exercice 5 :
Soit (Π) le plan d'équation :$2x+y-z=3$. et (Δ) la droite orthogonale à (Π)passant par O.
1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion S_Π de plan (Π).
2) Déterminer l'expression analytique du demi-tour S_Δ de la droite(Δ).
3) Déterminer l'expression analytique de la composée $SS_\Delta oSoS_\Pi$.

Exercice 6 :
Soit la$f$ transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -3x+2y-2z+4 \\ y' = -8x+5y-4z+8 \\ z' = -4x+2y-z+4 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f
2. Montrer que pour M d'image M' le milieu de $[MM']$ est dans (P) et (MM') est parallèle à une direction fixe.
3. En déduire une description simple de f

Exercice 7 :

l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On définit les trois points : $A(3, \sqrt{6}, 3)$; $B(3, -\sqrt{6}, 3)$ et $C(4,0,0)$.

a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan (P) contenant O, A et B

b) Calculer les distances : OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

c) Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires ?

d) Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C c'est à dire,

e) Calculer les coordonnées de G.

2. Montrer que la droite (CG) est perpendiculaire au plan (P).

3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite (CG) avec le plan (P).

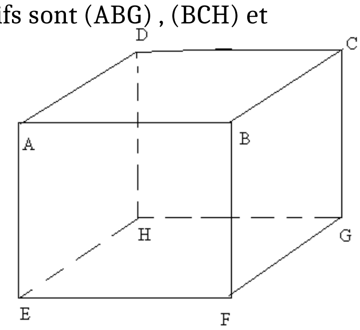
4. Montrer que la transformation de l'espace définie par les formules : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$ est une isométrie. Quels sont ses points fixes ? Déterminer les images des points O, A, B et C. Que remarque-t-on ?

Exercice 8 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. O est son centre. I est le milieu de [AB], J le centre de gravité de la face DCGH.

1) Montrer que (ABG) est le plan médiateur des segments [ED] et [FG] .

2) On note $S_1 ; S_2$ et S_3 les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG) , (BCH) et (IOJ). Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube.



3) On considère l'application f telle que $f = S_1 o S_2$.

a) Prouver que f est une rotation d'axe (BH) ;

b) En orientant le plan (ACF) par $\overrightarrow{BH}$, déterminer la restriction de f à ce plan. En déduire l'angle de f.

4) Soit r le demi-tour d'axe (OI) et l'application $g = rof$

a) En écrivant r comme la composée de 2 réflexions Judicieusement choisie, déterminer la nature de g.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de g.

Exercice 9

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace, (δ) la droite de vecteur directeur $\vec{i}$, passant par $H(O;O;2)$ et r la rotation d'axe (δ) telle que $r(O) = A$ avec $A(0;-2;2)$, t la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Préciser la nature de tor et ses élément caractéristiques.

Exercice 10

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère direct de l'espace, f est l'application de l'espace dans lui-même définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$

1) Démontrer que f est une rotation ; préciser son axe et une mesure de son angle.

2) On considère les quatre points $A(2;0;0)$; $B(-1;-\sqrt{3};O)$ et $D(0;0;4)$. On pose $E = \{A; B; C; D\}$

a) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral de centre gravité O.

b) Vérifier que l'application f laisse globalement invariant E.

Exercice 11

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le centre de la face EFGH. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ de l'espace. Soit S et S' les réflexions de plans respectifs (ACE) et (CFH).

1) Déterminer l'expression analytique des réflexions S et S'.

2) Démontrer que les plans (ACE) et (CFH) sont perpendiculaires. En déduire l'expression analytique du demi- tour d' axe (CI).