Problèmes de synthèse

Problème 1

On note f_n la fonction définie sur

$]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ avec

$n \in \mathbb{N}^*$

1°) a) Calculer les limites de f_n eu $-\infty$ (Pour la limité en $+\infty$, poser X = x+2)

b) Etudier suivant la parité de n la limite de f en -2

2°) a) Calculer $f_n'(x)$ et étudier son signe suivant la parité de n.

d) Dresser le tableau de variation de f_n .

3°) a)Démontrer que toutes les courbes C_n de f_n passent par un même point fixe A dont on déterminera les coordonnées

b) Déterminer l'inéquation de la tangente (T $_n$) à (C_n) en A

4°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) Démontrer que

$\forall n \neq 0$ et $\forall\, x \neq -2$ on a $f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x$

c) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2)

d) Représenter graphiquement (C_1) et (C_2)

Problème

A) Soit $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$.

1- Etudier les variations de g.

2- En déduire le signe de $g(x)$.

Problème 2

A) Soit $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$.

1- Etudier les variations de g.

2- En déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x < 0 \\ x + \ln\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right| & \text{si } x \quad 0 \end{cases}$$

1- Vérifier que f est définie sur IR\{1} et étudier la continuité de f en 0.

2- Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement ces résultats.

3- a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \dfrac{x}{2}$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

b) Donner la nature de la branche infinie de la courbe de f en +∞.

4- Etudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote oblique Δ en +∞ sur]0 ; +∞[\{1}.

5-a) Calculer $f'(x)$ et préciser le signe de $f'(x)$ sur]-∞ ; 0[à l'aide de la partie A).

b) Donner le tableau de variation de f.

6- Soit h la restriction de f sur]-∞ ; 0[. h est-elle bijective de]-∞ ; 0[sur un intervalle J à préciser ?

7- Tracer la courbe de f (unité 2cm) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

8- a) Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{x}{(2x+1)(x-1)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

b) Soit λ un réel tel que 1 < λ < 2. Déterminer l'aire A(λ) du domaine délimité par la courbe de f, l'asymptote Δ et les droites d'équations : x = λ et x = 2.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to1} A(\lambda)$.

Problème 3

A- Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln\left(1+e^x\right).$$

1- a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - 1 + x\right] = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe (unité 2cm).

c) Montrer que f réalise une bijection de]-∞ ; +∞ [sur]-∞ ; 0[.

2- Soit g la fonction de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = e^{-x}\ln\left(1+e^x\right).$$

a) Démontrer que g est dérivable sur IR.

b) Montrer que quel que soit le réel x, $g'(x) = e^{-x}f(x)$

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

d) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

3- a) Montrer que $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) A tout réel λ, on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} g(x)dx$.

Justifier l'existence de I(λ). Calculer I(λ) à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

B- 1- Montrer que g est une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

2- a) Calculer g(0).

b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point ln2.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse ln2.

Problème 4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + e^x}{2}\right)$

1) a) Etudier les variations de f et démontrer que pour tout $x \in IR,\ f(x) \quad 0$.

b) Déterminer les asymptotes de C_f et tracer C_f : on pourra montrer à $+\infty$ que $f(x) = x - \ln 2 + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$
.

2) a) Démontrer que pour tout réel x :

$$|f'(x)| < 1 \text{ et } f''(x) = 1 - (f'(x))^2 .$$

b) Démontrer que si $x \in]-1;+1[$ il existe un unique réel y et un seul tel que $f'(y) = x$.

c) Exprimer y en fonction de x.

3) Soit $n \in IN,\ y \in IR^+ \text{ et } I_n(y) = \int_0^y [f'(x)]^n dx$

a) Justifier l'existence de $I_n(y)$

b) Calculer I_0 et I_1

c) En utilisant $[f'(x)]^2 = 1 - f''(x)$ démontrer que pour tout

$n \quad 2,\text{on a} \quad I_n(y) = I_{n-2}(y) - \frac{1}{n-1}[f'(x)]^n$

4) En déduire que pour tout $p \in IN^*$

$$I_p(y) = y - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}[f'(u)]^{2k-1}$$

$$I_{2p-1}(y) = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}[f'(y)]^{2k}$$

5) Démontrer que, pour tout

$$n \in IN : \quad 0 \leq \int_0^y (f'(u))^{2p} du \leq y[f'(y)]^{2p}$$

6) En déduire y étant fixé que la suite de terme général

$\int_0^y (f'(u))^{2p} du$ est convergente. Préciser sa limite

<u>Problème 5</u>

Pour tout entier $n \quad 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (avec $\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et } \|\vec{j}\| = 10cm$
)

A.

1) Etudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$

Pour $n \quad 2$, étudier la position relative de (C_n) et de (C_{n-1}) et vérifier que le point $A_n(n; f_n(n))$ de (C_n) est aussi sur (C_{n-1}).

2) Construisez sur un même graphique les courbes (C_1), (C_2) et (C_3).

B. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = f_n(n)$.

1) En utilisant les résultats de la partie **A.**, montrer que (U_n) est décroissante.

2) Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par

$$g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$$

a) Montrer que pour tout t de $[0 ; 1]$,

$$\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$$

b) Déduisez en que, pour tout entier $n \quad 1$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{-1-\frac{1}{4n}}$$

3) **a.** Montrer que pour tout $n \quad 1$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

b. Déduisez en que, pour tout n,

$n \quad 2, U_n \leq e^{1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+....+\frac{1}{2}+1\right)}$

4) Démontrer que pour tout

$$n \quad 2, \int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

5) Déduisez en que, pour tout $n \quad 2 \quad U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$.

Quelle est la limite de la suite (U_n)

C. Pour a fixé, positif, et pour tout entier n, $n \quad 1$, on pose : $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

1) Calculer $I_1(a)$.

2) Montrer que pour $n \quad 1$, pour tout

$$t \quad 0, 0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$$

Déduisez en un encadrement de $I_n(a)$.

3) Montrer que pour $n \quad 1$, $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$. Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quant n tend vers $+\infty$.

4) Trouver lorsque $n \quad 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et déduisez en que pour tout

$$n \quad 2, I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + ... + \frac{a^n}{n!}\right)$$

L'égalité est-elle valable pour $n = 1$

« La possibilité est le principe de l'essence,
la perfection le principe de l'existence. »
Gottfried Wilhelm Leibniz