Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S - Enseignement obligatoire

Intégrales

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 16 septembre 2005

[1] frederic.demoulin@voila.fr

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique que cette notion a été abordée dans l'exercice
F.I. : fonction définie par une intégrale ; I.P.P. : intégration par parties ; E.D. : équations différentielles

N°	Lieu	Année	QCM	F.I.	I.P.P.	Aires	Vol.	E.D.	Trigo.	exp	ln	Suites
1	Asie	Juin 2005			⋆					⋆		⋆
2	La Réunion	Juin 2005		⋆	⋆	⋆				⋆	⋆	
3	Liban	Juin 2005			⋆					⋆		⋆
4	Inde	Avril 2005		⋆		⋆				⋆		
5	Amérique du Sud	Nov 2004			⋆		⋆	⋆		⋆	⋆	
6	France	Sept 2004			⋆						⋆	
7	Polynésie	Sept 2004		⋆	⋆	⋆					⋆	⋆
8	Antilles-Guyane	Juin 2004		⋆	⋆						⋆	⋆
9	Polynésie	Juin 2004								⋆		⋆
10	Polynésie	Sept 2001			⋆					⋆		⋆
11	Inde	Avril 2001			⋆					⋆		⋆
12	France	Juin 1999			⋆					⋆		⋆
13	Asie	Juin 1998			⋆						⋆	⋆
14	La Réunion	1997		⋆						⋆		⋆
15	Bordeaux-Caen	1986							⋆			
16	Nancy-Metz	1980									⋆	

Exercice 1 Asie, Juin 2005 (7 points)

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. Démontrer par récurrence que $\mathrm{e}^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.
   (a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que :

$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right).$$

Exercice 2 La Réunion, Juin 2005 (3 points)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.
On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat.

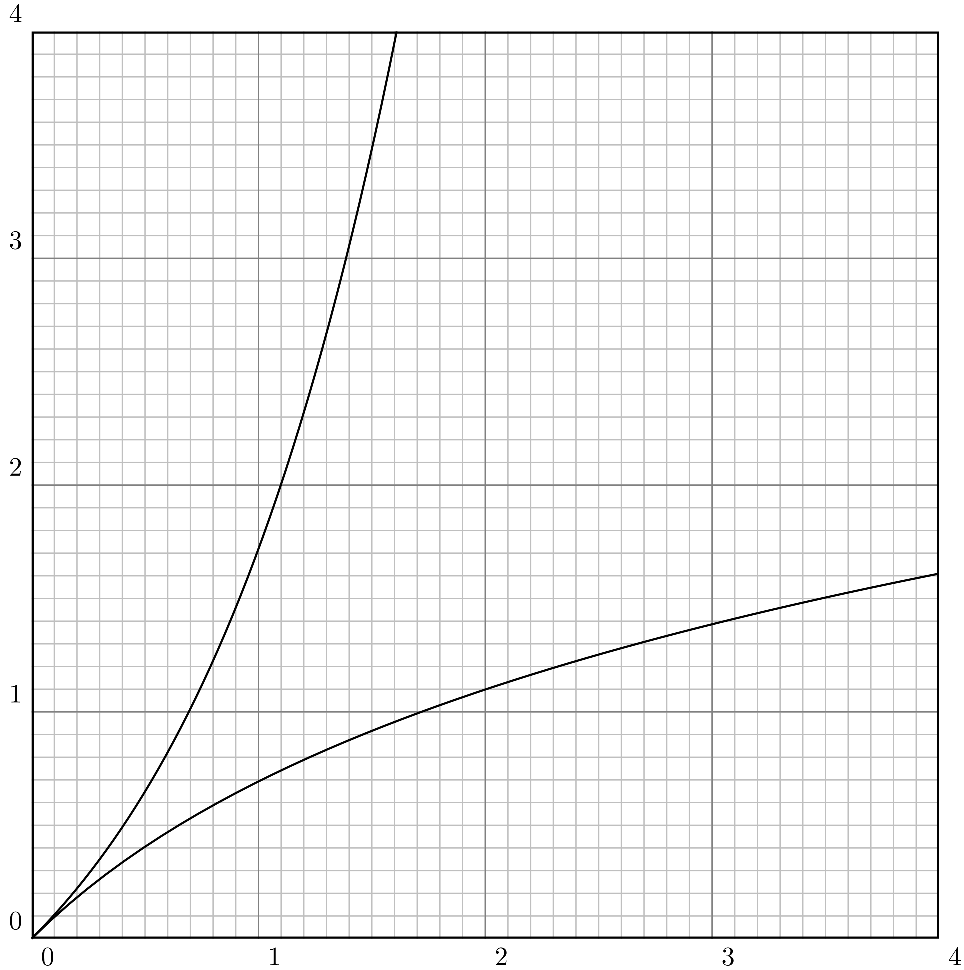
1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $O(0\,;0)$. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
   (a) En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :

$$I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\,\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire la valeur de $I(a)$.

(c) Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.

Annexe (à rendre avec la copie)



Exercice 3 Liban, Juin 2005 (8 points)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\,;\,1]$. En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad (R)$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	$7,1828182845\text{E}-01$	$7,1828182846\text{E}-01$
2	$4,3656365691\text{E}-01$	$4,3656365692\text{E}-01$
3	$3,0969097075\text{E}-01$	$3,0969097076\text{E}-01$
4	$2,3876388301\text{E}-01$	$2,3876388304\text{E}-01$
5	$1,9381941508\text{E}-01$	$1,9381941520\text{E}-01$
6	$1,6291649051\text{E}-01$	$1,6291649120\text{E}-01$
7	$1,4041543358\text{E}-01$	$1,4041543840\text{E}-01$
8	$1,2332346869\text{E}-01$	$1,2332350720\text{E}-01$
9	$1,0991121828\text{E}-01$	$1,0991156480\text{E}-01$
10	$9,9112182825\text{E}-02$	$9,9115648000\text{E}-01$
11	$9,0234011080\text{E}-02$	$9,0272128000\text{E}-02$
12	$8,2808132963\text{E}-02$	$8,3265536000\text{E}-02$
13	$7,6505728522\text{E}-02$	$8,2451968000\text{E}-02$
14	$7,1080199309\text{E}-02$	$1,5432755200\text{E}-01$
15	$6,6202989636\text{E}-02$	$1,3149132800\text{E}+00$
16	$5,9247834186\text{E}-02$	$2,0038612480\text{E}+01$
17	$7,2131811612\text{E}-03$	$3,3965641216\text{E}+02$
18	$-8,7016273909\text{E}-01$	$6,1128154189\text{E}+03$
19	$-1,7533092042\text{E}+01$	$1,1614249296\text{E}+05$
20	$-3,5166184085\text{E}+02$	$2,3228488592\text{E}+06$
21	$-7,3858986580\text{E}+03$	$4,8779825043\text{E}+07$
22	$-1,6249077047\text{E}+05$	$1,0731561499\text{E}+09$
23	$-3,7372887209\text{E}+06$	$2,4682591448\text{E}+10$
24	$-8,9694930302\text{E}+07$	$5,9238219474\text{E}+11$
25	$-2,2423732585\text{E}+09$	$1,4809554869\text{E}+13$

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la relation de définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   (b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

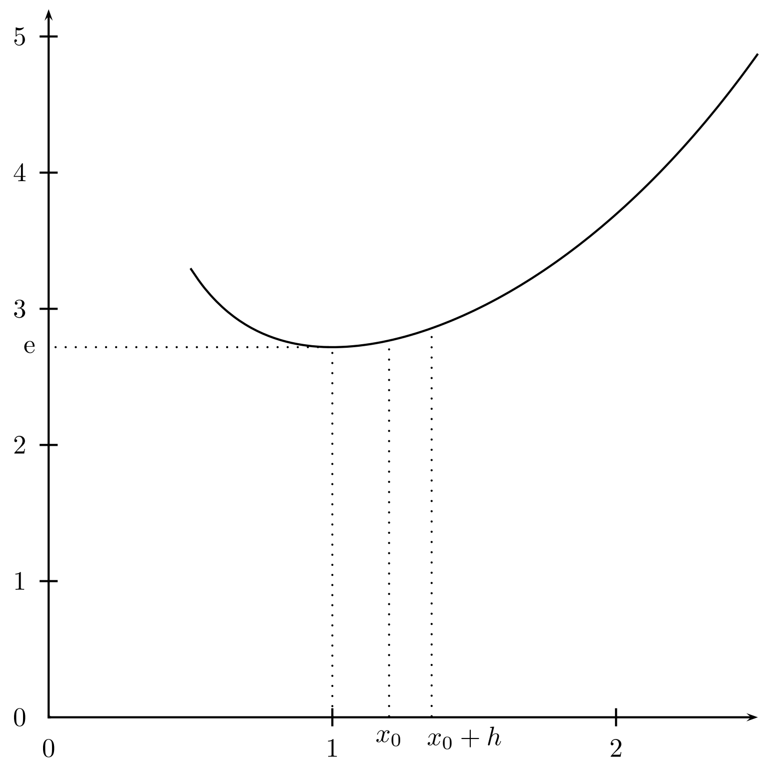
On s'intéresse à l'influence du terme initial a de cette suite sur son comportement à l'infini.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - \mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
   (On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

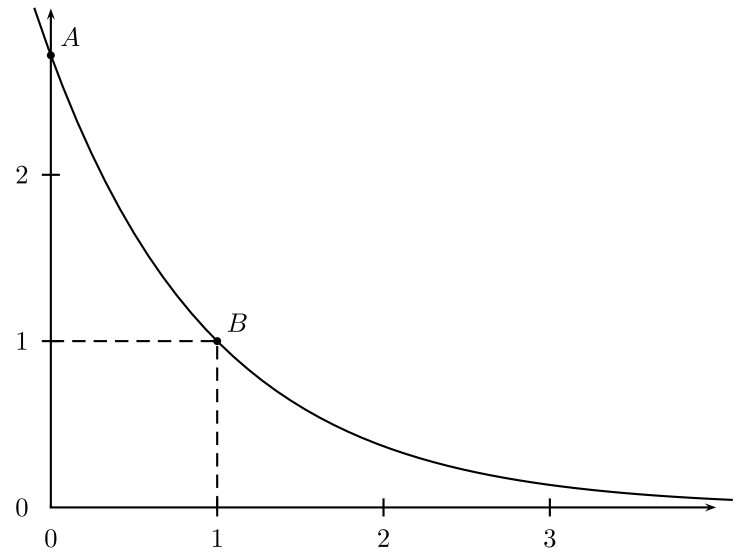
Exercice 4 Inde, Avril 2005

On considère la fonction f, définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$.

1. (a) Justifier la continuité de f sur $[1\,;\,+\infty[$.
   (b) Montrer que f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
2. **Restitution organisée de connaissances**
   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.
   Pour tout réel x_0 de $[1\,;\,+\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.
   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\,;\,+\infty[$ est une primitive de f.
   (a) Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
   (b) Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;\,+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :
   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$
   (c) Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?
   (d) En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$.
   (e) Conclure.



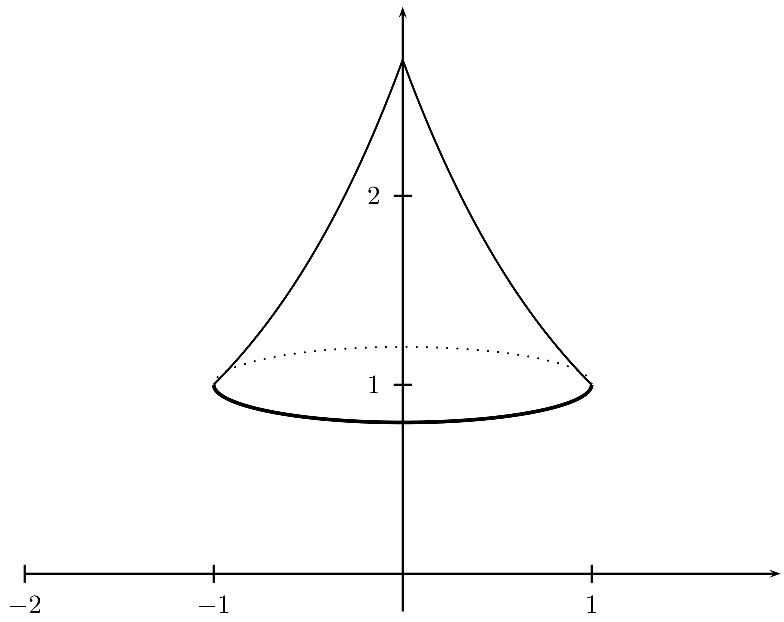
Exercice 5 Amérique du Sud, Novembre 2004



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(E)\ :\quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad y(0) = \mathrm{e}.$$

1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{1-x} = t$ d'inconnue x.
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
   On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume et on admet que $V = \pi \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (1 - \ln t)^2\,\mathrm{d}t$.
   Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



Exercice 6 France, Septembre 2004

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

   (a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

   (b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

   Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

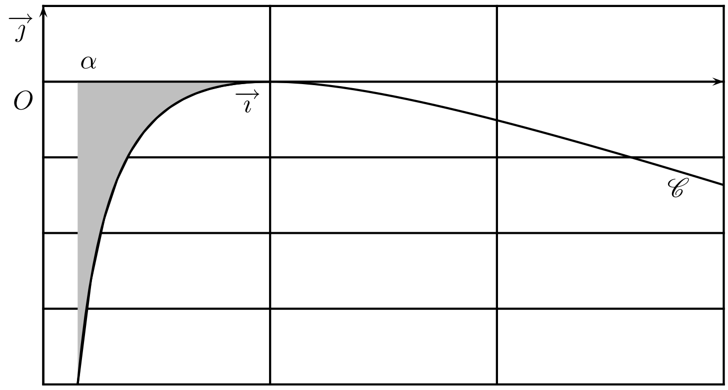
$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln x\,\mathrm{d}x.$$

   On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, avec p et q rationnels.

Exercice 7 Polynésie, Septembre 2004

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. (a) Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ est du signe de :

$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right].$$

   (b) Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

   (c) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0\,;1[$.

   (a) Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

   (b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\,;2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1.$$

   (a) Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\,;2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)+u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   (b) Déterminer la valeur exacte de ℓ.

Exercice 8 Antilles-Guyane, Juin 2004

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Soit $a \in [0\,;+\infty[$. On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 \,\mathrm{d}t$. Calculer $J(a)$.
6. (a) Démontrer que pour tout $t \in [0\,;\,a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.
   (b) Démontrer que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.
7. En déduire que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \frac{a^6}{6}$.
8. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 9 Polynésie, Juin 2004

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t+n}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le sens de variation de cette suite.
   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive.
   (c) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,1]$ on a $\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t+n} \leqslant \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Étudier le sens de variation et le signe de f.
   (b) En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;\,1]$.
   (c) Établir, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

   (d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$.
   (e) Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}.$$

   (f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Exercice 10 Polynésie, Septembre 2001

Pour tout naturel $n \geqslant 1$ on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}\,n!}\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n n!}\mathrm{A}.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction :

$$t \mapsto (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \text{ sur l'intervalle } [0\,;\,1].$$

En déduire la limite quand n tend vers plus l'infini de :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Exercice 11 Inde, Avril 2001

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   (b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

   (c) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n I_n.$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Exercice 12 France, Juin 1999

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,2]$ par $\varphi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$.
   Étudier les variations de φ sur $[0\,;\,2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$:
   $$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}.$$
   (b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$, on a :
   $$\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)\mathrm{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}.$$
   (c) Par intégration en déduire que :
   $$\frac{3}{2}n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right).$$
   (d) On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1$.
   Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{7}{2}$.
2. (a) Vérifier que, pour tout t dans $[0\,;\,2]$, on a : $\dfrac{2t+3}{t+2} = 2 - \dfrac{1}{t+2}$.
   En déduire l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que, pour tout t dans $[0\,;\,2]$, on a $1 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}$.
   En déduire que $I \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} I$.
   (c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 13 Asie, Juin 1998

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
$\mathbb{N}^*$ *est l'ensemble des entiers strictement positifs.*

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x.$$

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,\mathrm{e}[$ et pour tout entier naturel n, on a :
   $$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0.$$
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

(b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

(c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (c) En déduire la limite de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Exercice 14 La Réunion, 1997

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit a un élément non nul fixe dans I. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_0(a)$.
2. Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

   et en déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-a}.$$

3. En déduire que pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.
4. Dans cette question, on pose $a = 1$.
   On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

   On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $\mathscr{R}$ (unité graphique : 4 cm).

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}\,x^n.$$

   (c) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

   puis la limite de u_n.

   (d) Déduire enfin que $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

Exercice 15 Bordeaux-Caen, 1986

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}.$$

1. (a) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?
   (b) Calculer I.
2. (a) Soit la fonction $f : \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.
   Démontrer que f est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et que, pour tout x appartenant à cet intervalle :
   $$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}.$$
   (b) Déduire du calcul précédent une relation entre I et J, puis calculer J.

Exercice 16 Nancy-Metz, 1980

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\ .$$

1. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.
2. Soit k la fonction numérique définie par :
   $$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}\,x^3 - \frac{3}{4}\,x^2 + x - 1.$$
   Factoriser k et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_p$, courbes représentatives de f et P, dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ orthonormé du plan.
3. À l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x \in [0\,;\,1]$, montrer que :
   $$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{120}\ .$$
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Déduire des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que :
   $$\frac{n}{240} < \ln 2 < \frac{n+1}{240}\ .$$