FONCTION EXPONENTIELLE

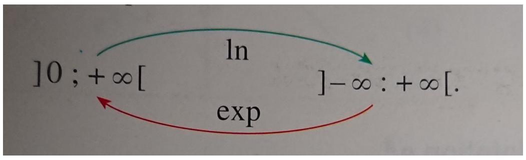
I Fonction exponentielle de base e

1) DÉFINITION

On appelle fonction exponentielle à base e la fonction notée exp, définie de $]-\infty;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$ qui à tout x associe $exp(x)$.
La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien (ln)
$exp(x) = e^x$ se lit (expo de x ou exponentielle de x)

NOTATION

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow]0;+\infty[\\ x &\longmapsto exp(x) = e^x \end{aligned}$$



2) Propriétés

Pour tout réel x et pour tout $y > 0$ on a :

$$\begin{array}{ccc} e^0 = 1 & \text{car} & \ln(1) = 0 \\ e^1 = e & \text{car} & \ln(e) = 1 \\ e^{-1} = \dfrac{1}{e} & \text{car} & \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1 \end{array}$$

Pour tout réel a et pour tout réel b et $p \in \mathbb{Z}$on a :

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$
$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$
$$\left(e^a\right)^p = e^{ap}$$
$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

REMARQUE

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(e^x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \text{ existe et } \qquad e^x > 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y > 0 \text{ on a :}$$
$$e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln(y) \qquad \text{et} \qquad \ln(x) = y \Longleftrightarrow x = e^y$$

Exemple :

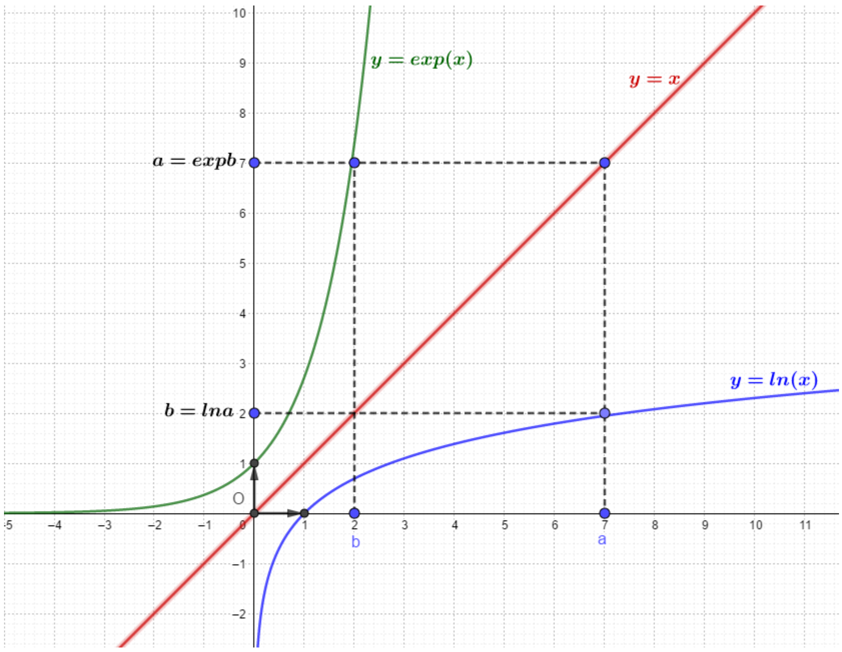
$$e^x = 3 \Longleftrightarrow x = \ln 3$$

$$\ln(x) = 4 \Longleftrightarrow x = e^4$$

$$\ln(2x+3) = 5 \Longleftrightarrow 2x+3 = e^5$$

$$e^{x+1} = 4 \Longleftrightarrow x+1 = \ln(4)$$

3) **Représentation graphique**
Dans un repère orthonormal les représentations graphiques des fonctions e^x et $\ln x$ se déduisent l'une de l'autre par la réflexion (ou symétrie orthogonale) d'axe la droite d'équation $y = x$



4) **Équations et inéquations**
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit :
Pour tout réel a et pour tout réel b :

$$e^a = e^b \Longleftrightarrow a = b$$
$$e^a < e^b \Longleftrightarrow a < b$$
$$e^a > e^b \Longleftrightarrow a > b$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
a) $e^{2x} = e^{x-3}$ b) $e^{2x+1} > e^{x+4}$ c) $e^{x^2-5} < e^{4x}$ d) $e^{2x+5} > 3$

Correction

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{x-3} &\iff 2x = x-3 \\ &\iff 2x - x = -3 \\ &\iff x = -3 \\ &\mathscr{S} = \{-3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2x+1} > e^{x+4} &\iff 2x+1 > x+4 \\ &\iff 2x - x > 4-1 \\ &\iff x > 3 \\ &\mathscr{S} =]3;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{x^2-5} < e^{4x} &\iff x^2-5 < 4x \\ &\iff x^2-4x-5 < 0 \\ &\Delta = 16+20 = 36 \\ &x_1 = -1 \qquad x_2 = 5 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
x^2-4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\mathscr{S} =]-1;5[}$$

$$\begin{aligned} e^{2x+5} > 3 &\iff \ln e^{2x+5} > \ln 3 \\ &\iff 2x+5 > \ln 3 \\ &\iff x > \frac{\ln 3 - 5}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]\frac{\ln 3 - 5}{2};+\infty\right[}$$

II LIMITES

Nous savons que $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$.
Nous admettons que :

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} e^x = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty}$$

La fonction exponentielle est prépondérante devant la fonction puissance
$\forall \alpha \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{x\to -\infty} xe^x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

Exemple : Calculer les limites suivantes en $-\infty$ et en $+\infty$ et pour $h(x)$ calculer aussi la limite en 0

$f(x) = \left(x+1+e^x\right)$ $\qquad g(x) = \left(-3x+e^{-x}\right)$ $\qquad h(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

Correction

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(x+1+e^x\right), \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty}(x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^x\right) = 0 \end{array}\right\} \text{donc par somme on a :}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x+1+e^x\right), \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}(x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par somme on a :}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = \left(-3x+e^{-x}\right), \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty}(-3x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^{-x}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par somme on a :}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \left(-3x + e^{-x}\right), \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{donc par somme on a :}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x + 1\right) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - 1\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par quotien on a :}$$

une forme indéterminée (F.I)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} h(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}\right) or \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}\right) = \dfrac{1}{1} = 1$

D'où

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right), \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x + 1\right) = 0 + 1 = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x - 1\right) = 0 - 1 = -1 \end{array}\right\} \text{donc par quotient on a :}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = -1}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}(x) = \left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right), \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+1\right) = e^0+1 = 1+1 = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right) = e^0-1 = 1-1 = 0\end{array}\right\}\text{donc par quotient on a :}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = ?\infty$$

Étudions le signe de $\left(e^x-1\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe on a ; par quotient :

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty}$

III **Courbe de la fonction exponentielle**

Rappels :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$$
$$x \longmapsto exp(x) = e^x$$

La fonction exponentielle admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy) car $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$

De plus la droite $(D) : y = 0$ est une asymptote horizontale car : $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} e^x = 0}$

Dérivée

$$\left(e^x\right)' = e^x > 0$$

* Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Point d'intersection avec les axes de coordonnées :

* Avec l'axe des abscisses (Ox) : On pose $x = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$. Donc la courbe coupe l'axe des abscisses au point $A(0,1)$

* Avec l'axe des ordonnées (Oy) : On pose $y = 0 \Rightarrow e^x = 0$ ce qui est impossible donc la courbe ne coupe pas l'axe des ordonnées.

* Équation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$$(T): y = e^0(x-0) + e^0$$
$$(T): y = 1(x) + 1$$
$$\boxed{(T): y = x+1}$$

Tableau de variation de e^x

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x		$+$		
e^x	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	e $\nearrow$	$+\infty$

Courbe de e^x (Voir la partie Représentation graphique)

IV **Exponentielle et fonction composée**

Exemple : $f(x) = e^{U(x)}$

a) **Domaine de définition**

$$e^{U(x)} \text{ existe si et seulement si } U(x) \text{ existe}$$

b) **Dérivée**

Si U est dérivable alors $\left(e^{U(x)}\right)' = U'(x)e^{U(x)}$

c) **Limites** :

Si $\lim\limits_{x\to a} U(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}\left(e^{U(x)}\right) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} U(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}\left(e^{U(x)}\right) = 0$

Si $\lim\limits_{x\to a} U(x) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a}\left(e^{U(x)}\right) = e^l$

Application :Déterminer le domaine de définition, les limites aux bornes et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{-x} \qquad g(x) = e^{2x} \qquad h(x) = e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

Correction

Domaine

$f(x) = e^{-x}$, $-x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[}$

Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \qquad \text{car} \qquad \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

Dérivée

$-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f(x) = e^{-x}$ est dérivable et on a :

$$f'(x) = -e^{-x}$$

Domaine

$g(x) = e^{2x}$ $2x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$

Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

Dérivée

$2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f(x) = e^{2x}$ est dérivable et on a :

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$h(x) = e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

Domaine

$h(x)$ existe si et seulement si $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ c'est à dire si $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Donc $\boxed{D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[}$

Limites

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = e^1 = e \end{array}\right\} \text{donc par quotient on a : } \boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = e\,.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1 \\ \\ \lim\limits_{X\to1} e^{X} = e^1 = e \end{array}\right\} \text{donc par quotient on a : } \lim_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = e^1 = e$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = e\,.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1}(x-1)=-1-1=-2\\ \\ \lim\limits_{x\to-1}(x+1)=-1+1=0\end{array}\right\}\text{donc par quotient on a : }\lim\limits_{x\to-1}h(x)=?\infty\ .$$

Étudions le signe $x+1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe on a; par quotient :

$\boxed{\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=-\infty}$

Dérivée

la fonction $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ est dérivable sur $D_g=\mathbb{R}\backslash\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

De plus $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\left(\dfrac{2}{(x+1)^2}\right)$

D'où

$$\boxed{\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}}$$

V Fonction exponentielle de base 10

Définition

La fonction exponentielle de base 10 est la réciproque de la fonction logarithme de base 10.

Elle est notée : $\exp_{10}$

NOTATION

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\longrightarrow]0;+\infty[\\ x&\longmapsto exp_{10}(x)=10^x\end{aligned}$$

Remarque

$$\forall x>0\,\log(x)=y\Longleftrightarrow x=10^y$$

$$\forall x\in\mathbb{R},10^x=y\Longleftrightarrow x=\log(y),\qquad y>0$$

Exemple

$$\log(x)=3\Longleftrightarrow x=10^3$$

$$10^x=4\Longleftrightarrow x=\log(4)$$