POLYNOMES

I) Rappels sur les identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad\quad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Activité

1) Développer $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)(x-2)$
2) Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$
   a) Calculer $P(-2)$
   b) Déterminer les réels a, b et c pour que $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $P(x) = 0$.
   d) Factoriser $P(x)$ puis résoudre $P(x) \leq 0$
3) Soit $(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

   Calculer $Q(1)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ $Q(x) = 0$.

II) Définition et propriétés

1) Définition

Soit a un réel et n un entier naturel.

- On appelle monôme l'expression ax^n
- a est appelé le coefficient
- n le degré
- x est la variable

  Exemple

  $f(x) = 4x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 2.

  Remarque

  $a \in \mathbb{R};\ a = ax^0$

  Tout réel a est un monôme de degré 0 et de coefficient a.

Soient $\quad a_0, a_1,\ a_2, \dots; a_{n-1},\ a_n$ des nombres réels

- On appelle fonction polynôme ou polynôme toute expression de la forme :

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- Les réels $a_0, a_1,\ a_2, \dots; a_{n-1},\ a_n$ sont appelés les coefficients de P.

Pour toutes remarques et/ou suggestions veuillez contacter M. DIAGNE au 77 757 03 53

- Le plus grand entier naturel n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le degré du polynôme P et est noté $DegP = n$

  Exemple

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$$

  Remarque

- Si tous les coefficients sont nuls, on dit que le polynôme est nul ;
- Un polynôme de degré polynôme 2 est appelé un trinôme.

Exercice d'application

Parmi les fonctions suivantes dites celles qui sont des polynômes et dans le cas où la fonction est la fonction est un polynôme, déterminer son degré et son coefficient,

$f(x) = -4x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ $\qquad$ $g(x) = \frac{2}{5}x^2 - \sqrt{3}x + 1$

$h(x) = \sqrt{7}x^6 - 5x + 1$ $\qquad$ $n(x) = 2x^2 - 3x + 1$

2) <u>Egalité de polynômes</u>

Soit P et Q deux polynômes :

$P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux si et seulement si : les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

3) <u>Opérations sur les polynômes</u>

Soit P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et m.

- La somme de deux polynômes est un polynôme de degré $\sup(n; m)$.

$H(x) = P(x) \times Q(x)$. Le degré du polynôme H est $DegH = DegP + DegQ$

On appelle produit des polynômes P et Q le polynôme $H(x) = P(x) \times Q(x)$. Le degré du polynôme H est $DegH = DegP + DegQ$

Soit $H(x) = P(x) \times Q(x)$.

Le degré du polynôme H est $DegH = DegP + DegQ$

- Soit $k \in \mathbb{R}$, le polynôme $k.Q(x)$ est un polynôme de même degré que Q

Exercice d'application

On donne les polynômes suivants :

$A(x) = 3x^2 + 4x - 2$; $B(x) = x^3 + x^2 + 1$; et $C(x) = x^2 + 1$

Calculer : $A(x) + B(x)$, $A(x).C(x)$ et $3.C(x)$

Que peut-on dire des degrés des polynômes obtenus ?

Résolution

$$\boldsymbol{A(x) + B(x)} = 3x^2 + 4x - 2 + 3x^2 + 4x - 2$$

$$\boxed{A(x) + B(x) = \boldsymbol{x^3 + 4x^2 + 4x - 1}}$$

$$A(x).C(x) = \left(3x^2 + 4x - 2\right)(x^2 + 1) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x - 2$$

$$\boxed{A(x).C(x) = 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 2}$$

$$3.C(x) = 3(x^2 + 1) \qquad \boxed{3.C(x) = 3x^2 + 3}$$

Faites des remarque par rapport aux degré (après le calcul).

4) Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme et α un réel.

- On dit que α est racine de P ou zéro de P si et seulement si : $P(\alpha) = 0$
- Si α est racine d'un polynôme P alors il existe un polynôme G tel que $P(x) = (x - \alpha).G(x)$ avec $DegG = DegP - 1$

Exemple

Soit polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

Montrer que 1 est racine de P.

Résolution : $P(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 4(1) - 1 = 1 - 4 + 4 - 1 = 0$

$P(1) = 0$; Donc 1 est racine de P.

Pour toutes remarques et/ou suggestions veuillez contacter M. DIAGNE au 77 757 03 53

III) <u>Méthodes de factorisation</u>

1) Division euclidienne

Exemple

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes. Dans chacun des cas, effectuer la division euclidienne de A par B.

a) $A(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ et $B(x) = x^2 + 2x - 1$
b) $A(x) = 6x^3 - x^2 - 11x + 6$ et $B(x) = 3x - 2$

Résolution

Pour a) on a, après division euclidienne :

$A(x) = B(x).(2x - 1) + 4$, ainsi $A(x)$ n'est pas divisible par $B(x)$.

Pour le b) on a :

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - x^2 - 11x + 6 & 3x - 2 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 4x^2 & 2x^2 + x - 3 \\ \hline 0+3x^2 - 11x + 6 & \\ -3x^2 + 2x & \\ \hline 0 - 9x + 6 & \\ 9x - 6 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Donc $A(x) = B(x).(2x^2 + x - 3)$

Ainsi $A(x)$ est divisible par $B(x)$.

2) Identification des coefficients

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes tels que :

$A(x) = 6x^3 - x^2 - 11x + 6$ et $B(x) = 3x - 2$ et $A(x)$ divisible par $B(x)$.

Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $A(x) = B(x) \times Q(x)$

Résolution

$A(x)$ divisible par $B(x)$ alors il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $A(x) = B(x) \times Q(x)$.

On sait que polynôme $DegA(x) = DegB(x) + DegQ(x)$ Donc $DegQ(x) = DegA(x) - DegB(x) = 2$

Ainsi, $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

On a

$$\begin{aligned}
A(x) &= B(x) \times Q(x) \\
A(x) &= (3x-2)(ax^2+bx+c) \\
A(x) &= 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\
A(x) &= 3ax^3 + (3b-2a)x^2 + (3c-2b)x - 2c
\end{aligned}$$

D’après la propriétés sur l’égalité de deux polynômes on a :

$$\begin{cases} 3a = 6 \\ 3b - 2a = -1 \\ 3c - 2b = -11 \\ -2c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} \; d'\text{où } Q(x) = 2x^2 + x - 3$$

3) Horner

Exemple

Soit un polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ avec $x_0 = 2$ une racine de P.

Déterminer le polynôme $P(x) = (x-2) \times Q(x)$

Résolution

On a $DegQ(x) = DegP(x) - 1 = 2$ donc $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Coefficients de $P(x)$ dans l'ordre décroissant des puissances	1	-4	5	-2
$x_0 = 2$		2	-4	2
Coefficients de Q(x) dans l'ordre décroissant des puissances	1 $\uparrow$ a	-2 $\uparrow$ b	1 $\uparrow$ c	0 $\uparrow$ $P(x_0)$

Donc $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

Pour toutes remarques et/ou suggestions veuillez contacter M. DIAGNE au 77 757 03 53

IV) Fractions rationnelles

1) Définition

Soient f et g deux fonctions polynômes, la fonction polynôme h définie par :

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est appelé une fraction rationnelle. Donc une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes

2) Domaine de définition

Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ une fraction rationnelle.

L'ensemble de définition ou le domaine de définition h est l'ensemble

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \,;\, g(x) \neq 0\}$$

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x+5}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Déterminer les réels a, b et c pour que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+5}$

Résolution

1) $f(x)$ existe si et seulement si $x + 5 \neq 0 \Rightarrow \ x \neq -5$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}}$

2) On a : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+5} = \frac{(ax+b)(x+5)+c}{x+5} = \frac{ax^2+(5a+b)x+5b+c}{x+5}$

Par identification on :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = -4 \Longrightarrow b = -9 \\ 5b + c = 3 \Longrightarrow b = 48 \end{cases}$$

Finalement $\boxed{f(x) = x - 9 + \frac{48}{x+5}}$

REMARQUE : on peut aussi utiliser la division euclidienne.

Pour toutes remarques et/ou suggestions veuillez contacter M. DIAGNE au 77 757 03 53