M.E IA/DKR

LYCEE JOHN F. KENNEDY

I.E.F DAKAR

Lycée J.F.KENNEDY

JAN-2017

Terminales S_1

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES 1^{er} SEMESTRE. Durée= $4H$

Exercice 1. :(6 pts)

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est $4cm$.

A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1.a/ Déterminer une relation entre les arguments de z et de z'.

b. En déduire que les points O, M et M' sont alignés.

2. Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

3. On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. On désigne par (Γ) le cercle de centre A contenant le point O et par (Γ^*), le cercle cercle (Γ) privé de O. On suppose dans cette question que le point $M \in (\Gamma^*)$

a. Justifier l'égalité $|z-1| = 1$.

Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.

4. Le point M étant un point du plan d'affixe z non réelle, on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.

a. Calculer $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de z. Exprimer son argument en fonction de l'angle $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$.

b. Comparer les angles $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

c. Démontrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

Exercice 2. :(8 pts)

Le but de ce problème est de démontrer que e est irrationnel.

A/**Etude de la suite (U_n) définie par** $U_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-x}\Big(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\Big)$

1. Calculer la dérivée f'_n de f_n et démontrer que $f'_n(x) = -\dfrac{x^n}{e^x} \times \dfrac{1}{n!}$

2. En déduire que sur $[0;1]$ $\quad |f'_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n!}$

3. Soit F_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $F_n(x) = \dfrac{1}{n!}x - f_n(x)$.

a. Calculer F'_n et dresser le tableau de variation de F_n sur $[0;1]$.

b. En déduire que sur $[0;1]$ on a : $-1 \leqslant F_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!} - \dfrac{U_n}{e}$.

c. En déduire que $\dfrac{U_n}{e} - 1 \leqslant \dfrac{1}{n!}$

4. Soit G_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $G_n(x) = -\dfrac{1}{n!}x + f_n(x)$

   a. Calculer G'_n et dresser la tableau de variation de G_n sur $[0;1]$.

   b. En déduire que sur $[0;1]$ on a : $-\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{U_n}{e} - 1$.

5. Déduire des questions précédentes que $\left|\dfrac{U_n}{e} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$

B/ **On pose** $V_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{n \times n!}$

1. Démontrer que la limite de (V_n) est e.
2. Démontrer (U_n) est strictement croissante et que (V_n) est décroissante .
3. Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $U_n < e < V_n$.
4. Supposons que e est rationnel, c'est-à-dire $e = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs.

   a. On pose $\dfrac{a}{q!} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{q!}$.

   Vérifier que a est un entier et de $\dfrac{a}{q!} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{a}{q!} + \dfrac{1}{qq!}$.

   b. En multipliant les deux membres de la double iniégalité par $q \times q!$, montrer qu'on aboutit à une contradiction.

   c. Conclure.

Exercice 3. : 6pts

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$$

1.a/ Justifier l'existence de I_n.

b. Sans calculer I_n, montrer que la suite (I_n) est décroissante , dont tous les termes sont positifs.

2.a/ $\forall n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan^{n+1} x$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

3.a/ Calculer I_2.

b. Calculer $f(2) + f(6) + \cdots + f(4k-2)$ en fonction de I_n et I_{4k+2} où $k \in \mathbb{N}^*$.

c. En déduire la limite de la somme $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots - \dfrac{1}{4k-1} + \dfrac{1}{4k+1}$ lorsque $k \longmapsto +\infty$.

4.a/ Vérifier que la fonction $x \longmapsto \ln(\cos x)$ est définie et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa dérivée.

b. Calculer $f(1) + f(5) + \cdots + f(4k-3)$ en fonction de I_1 et I_{4k+1}, où $k \in \mathbb{N}^*$.

c. En déduire la limite de la somme $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + -\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k}$ lorsque $k \longmapsto +\infty$.

Bonne Chance!!!