



INSPECTION D'ACADEMIE DE DIOURBEL
Centre Régional de Formation des Personnels de l'Education

COMPOSITION STANDARDISEE DU PREMIER SEMESTRE 2017

Durée :04 H

MATHEMATIQUES TS₁

EXERCICE 1 : (04points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et $-2i$.

1/ a/ Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z vérifiant : $(2+i)z + (2-i)\bar{z} = 4$
(On pourra poser $z = x + iy$ où x et y sont deux nombres réels). 01

b/ Déterminer et construire l'ensemble (Γ) . des points M d'affixe z vérifiant : $(z + 2i)(\bar{z} - 2i) = 4$ (on pourra remarquer que : $\bar{z} - 2i = \overline{z + 2i}$). 01

2/ Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq -2i$) associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 4i}{z - 2i}$

a/ Vérifier que $z' - 1 = \frac{6i}{z - 2i}$. En déduire l'égalité $BM \times AM' = 6$ et déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'})$ 01

b/ On appelle M_1 et M_2 les points d'intersections de (Γ) et (Δ) . Déterminer et construire les images par f de M_1 et M_2 . 01

EXERCICE 2 : (06points)

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E) d'inconnue le nombre complexe z :

$$(E): (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha)$$

1/ Soit z une solution de (E) .

a/ Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$. 01

b/ En déduire que z est réel. 01

2/ a/ Exprimer $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$. 01

b/ Soit z un nombre complexe. On pose $z = \tan \varphi$ où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre. 01 + 01

c/ Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E) 01

PROBLEME : (10 points)

On se propose l'étude pour n entier naturel non nul des fonctions f_n . définies sur $[0, +\infty[$ par :

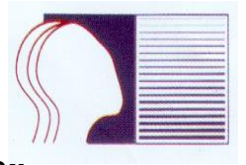
$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1/ a/ Prouver que f_n est continue sur $[0, +\infty[$. 0,5

b/ Etudier la dérivabilité de f_n en 0. 0,5

c/ Calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. 0,5+0,25

2/ a/ Déterminer la limite de f_n en $+\infty$. 0,25



INSPECTION D'ACADEMIE DE DIOURBEL
Centre Régional de Formation des Personnels de l'Éducation

- b/ Donner le tableau de variation de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(u) = e^{-u} - (1-u)$. 0,5
En déduire que, pour tout réel $u \geq 0$, on a la relation
(1) $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$. 0,5
- c/ Déduire de (1) que, pour tout $t \geq 0$, on a la relation (2) : $0 \leq e^{-t} - (1-t) \leq \frac{t^2}{2}$. 0,5
- d/ Prouver à l'aide de (2) que pour tout réel $x > 0$: $0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$. 0,5
- En déduire que la droite (D_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe représentative (C_n) de f_n . 0,25
- Préciser la position relative de (C_n) et de (D_n) . 0,25
- 3/ a/ Dresser le tableau de variations de f_n . 0,5
b/ Tracer la courbe (C_1) et son asymptote, en précisant la tangente en 0. 01,25
- 4/ Démontrer que, pour tout $n > 0$, l'équation $xe^{-\frac{1}{nx}} = 1$ a une unique solution α_n dans $]0, +\infty[$. 0,25
- 5/ Démontrer que α_n est solution de l'équation : $x \ln x = \frac{1}{n}$. 0,25
- 6/ Soit h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $h(x) = x \ln x$
a/ Etudier les variations de h . 0,5
b/ Prouver que $1,76 < \alpha_1 < 1,77$. 0,25
c/ Prouver que la suite (α_n) est décroissante. 0,25
- 7/ a/ Justifier que la suite (α_n) converge et que sa limite est supérieure ou égale à 1. 0,25+0,25
b/ Démontrer que $h(\alpha) = 0$. En déduire la valeur de α . 0,25+0,25