REPUBLIQUE DU DENEGAL
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION D'ACADEMIE DE SAINT-LOUIS

Composition du premier semestre

Epreuve : mathématiques- niveau : TS2

Durée : 4h

L'élève traitera les deux exercices et, au choix, l'un des deux problèmes

Exercice 1: ***(05 points)***

1) On considère la fonction f définie par f(x) = $\frac{x^2}{2x-1}$.
   a) Etudier les variations de f. **(0,5pt)**
   Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$. **(0,5pt)**
2) On définit la suite (U_n) par $U_o = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, ∀ n ∈ IN
   a) Montrer que $\mathrm{Un} \geq 1$, ∀ n ∈ IN. **(0,5pt)**
   b) Etudier le sens de variation de (U_n). **(0,5pt)**
   c) En déduire la convergence de (U_n) puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Un}$. **(0,5pt)**
3) On pose $V_n = \frac{-1+\mathrm{Un}}{\mathrm{Un}}$, n ∈ IN.
   a) Justifier que V_n existe ∀ n ∈ IN. **(0,5pt)**
   b) Montrer que $V_{n+1} = (V_n)^2$ ∀ n ∈ IN. En déduire que $V_n = (\frac{1}{2})^{2^n}$, ∀ n ∈ IN. **(1pt)**
   c) Exprimer U_n en fonction de n. Retrouver ainsi la limite de la suite (U_n). **(1pt)**

Exercice 2 : **(5 points)**

Soit φ la fonction définie sur ℝ par $\varphi(x) = x\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $\varphi'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **(0,75 pt)**
2. a) Montrer que :

$$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2};1\right],\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \leq \varphi'(x) \leq \frac{6}{\sqrt{5}}\,.$$ **(0,75 pt)**

   b) En déduire que :

$$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2};1\right],\ \frac{6}{\sqrt{5}}(x-1) \leq \varphi(x) \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}(x-1).$$ **(1 pt)**

   Interpréter graphiquement ce résultat. **(0,5 pt)**

3. a) Justifier que φ admet des primitives sur $[0;+\infty[$. **(0,5 pt)**
   d) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\,x$
   est une primitive de φ sur $[0;+\infty[$. **(1 pt)**
   c) Déterminer la primitive G de φ sur $[0;+\infty[$ vérifiant $G(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$. **(0,5 pt)**

Problème 1 (10 points)

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{1+x^2} & si\ \ x \in \left]-\infty, 0\right] \\ f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3} & si\ \ x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

1) Soit la fonction polynôme p définie par : $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   a) Etudier les variations de p . **(0,5 pt)**
   b) Montrer que l'équation $p(x) = 0$ admet une seule solution dans IR notée α et que α$\in$[1,6 ; 1,7]. **(0,75pt)**
   c) Déterminer alors le signe de $p(x)$ sur R. **(0,5pt)**
2) Déterminer Df puis étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **(0,5pt + 0,5 pt + 0,75pt)**
3) Montrer que pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{p(x)}{(1+x^2)^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur] 0, + ∞[. **(0,5pt + 0,5pt)**
4) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \left]-\infty, 0\right]$ puis étudier son signe. **(0,5pt + 0,5pt)**
5) Calculer les limites de f aux bornes de Df . Interpréter les résultats . **(0,75pt)**
6) Dresser le tableau de variations de f . **(0,5pt)**
7) Soit g la restriction de f à $\left[\alpha, +\infty\right[$.
   a) Montrer que g est bijective. **(0,5pt)**
   b) g^{-1} est-elle dérivable en $y_0 = g(\alpha)$. **(0,5pt)**
   c) Calculer $g(2)$. En déduire $(\mathrm{g}^{-1})'\left(\dfrac{-1}{9}\right)$ **(0,25pt + 0,5pt)**
8) Tracer (Cf) et (Cg^{-1}) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm). (**1,5 pt**)
   <u>*On mettra en évidence les demi-tangentes en 0*</u>

<u>Problème 2</u>: (10 points)

1) Soit $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}+\ln|x-2|$

a) Déterminer Df le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes. (**1,25pt)**

b) Dresser le tableau de variations de f **0,75pt)**

c) Calculer $f(1)$ en déduire le signe de f sur son domaine de définition. **(0,5pt)**

2) Soit la fonction g définie sur par : $g(x)=(x-1)\ln|x-2|+1$

a) Déterminer Dg et calculer les limites aux bornes de Dg . **(1,5pt)**

En déduire que (Cg) admet une asymptôte à préciser. **(0,5pt)**

b) Etudier les branches infinies de (Cg) **(0,5pt)**

3) Soit A le point d'intersection de (Cg) et la droite d'équation $y=1$, dont l'abscisse est strictement supérieure à 2 .

a) Démontrer que A est un point d'inflexion de (Cg) **(0,75pt)**

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (Cg) en A. **(0,25pt)**

4) Soit h la restriction de g sur l'intervalle $]2,+\infty[$

a) Démontrer que h est une bijection de $]2,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0,5pt)**

b) h^{-1} est-elle dérivable dans J (à justifier) ? **(0,5pt)**

c) Calculer $(h^{-1})'(1)$ et donner une équation de la tangente (T') à (Ch^{-1}) au point d'abscisse 1. **(0,75pt + 0,5pt)**

5) Construire dans un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm), les tangentes (T) et (T'), les asymptotes et les courbes (Cg) et (Ch^{-1}). **(1,75pt)**

Fin de l'épreuve