CLASSE : TS2 IA dakar/LYCEE BLAISE DIAGNE	BAC BLANC Epreuve : Mathématiques	2016/2017 Durée : 04h

EXERCICE 01 : 03pts

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = e$ et, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \sqrt{U_n}$
On pose, pour tout entier naturel n , $V_n = \ln(U_n)$.

1. a: Montrer que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ .En déduire la nature de la suite (V_n). **0,5pt**

b: Donner l'expression de V_n en fonction de n. En déduire l'expression de U_n en fonction de n. **0,5pt**

2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ et $P_n = U_0.U_1....U_n$.

a: Montrer que $P_n = e^{S_n}$ **01pt**

b: Exprimer S_n en fonction de n. **0,5pt**

c: En déduire l'expression de P_n en fonction n. **0,5pt**

EXERCICE 02 : 05pts

Dans l'ensembe des nombres complexes on considère l'équation

(E): $z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$.

1) a) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on précisera. **0,25pt**

b) Résoudre (E). **0,5pt**

2) dans le plan complexe, on désigne par, A, B, C les points d'affixes respectives $a = -1, \; b = -2 + i, \; c = i$.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$. **0,5pt**

b) En déduire la nature du triangle ABC. **0,25pt**

c) Donner le centre et le rapport de la similitude plane directe f qui laisse invariant A et transforme B en C. **0,5pt**

d) Donner l'expression analytique de f puis déterminer la nature et l'image de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$. **0,75pt**

3) Soit (z_n) la suite définie par $\begin{cases} z_0 = -1 \; et \; z_1 = i \\ z_{n+2} = 2z_{n+1} - 2z_n \end{cases}$ (R).

a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation définie par : $q^2 - 2q + 2 = 0$. **0,5pt**

b) Donner la forme algébrique de $z_{2;}$; z_3 . **0,5pt**

c) Déterminer les réels a et b pour que la suite (u_n) définie par $u_n = a(1-i)^n + b(1+i)^n$ vérifié la relation (R). **0,5pt**

4) soit n un entier supérieur ou égale à 2.On pose $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} v_j = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_{n-1}$. Avec

$v_n = (1-i)^n + (1+i)^n$.

a)calculer v_0; v_1 v_3 **0,5pt**

b) Déterminer S_n en fonction de n **0,25pt**

PROBLEME 12pts

Partie A

Soit U la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $U(x) = 1 + \ln x - e^{-x}$.

1) Etudier les variations de $U(x)$. **01pt**
2) Montrer que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,6; 0,7[$. **0,5pt**
3) En déduire le signe de $U(x)$. **0,5pt**

Partie B

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x + e^{-x} & si \quad x \succ 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{|x^2-1|} e^{\frac{1}{2}x} & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

1)a) Déterminer le domaine de définition de f. **0,5pt**

b) Etudier la continuité de f en 0. **0,5pt**

c) Etudier la dérivabilité de f en 0.Interpréter graphiquement les résultats obtenus. **0,75pt**

2)a) Montrer que $\forall \quad x \in]0; +\infty[$ on a $f'(x) = U(x)$. **0,5pt**

b) Pour $x \leq 0$ écrire $f(x)$ sans la valeur absolue et calculer $f'(x)$. **01pt**

3) Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha) = 1 + (\alpha + 1)\ln\alpha$. **01,5pt**

4) Etudier la nature de la branche infinie de (C_f) en $+\infty$. **0,5pt**

Partie C

Soit h la restriction de f a l'intervalle $I = [\alpha; +\infty[$.

1) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J a précisé. **0,75pt**

2) h^{-1} est elle dérivable sur J. **0,25pt**

3) Calculer $h(1)$ puis en déduire une équation de la tangente (T) a $(C_{h^{-1}})$ au point d'abscisse $\frac{1}{e}$. **0,75pt**

4) Tracer (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ et (T) dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ $(unité 2cm)$, prendre $\alpha = 0,6$. **02pts**

5) Calculer l'aire du domaine D délimité par (C_f) par l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. **01pt**

FIN

Bonne chance !

<u>Exercice 3</u> (6points)

On se propose d'étudier la convergence de la suite u définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n de N, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1) Soit f la fonction définie pour x de l'intervalle $[0;\ 1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.
   a) Déterminez $f'(x)$ et $f''(x)$.En déduire les variations de f' puis le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$.
   b) Etudiez le sens de variation de f .Déduisez –en l'image de $[0;\ 1]$ par f .
2) Démontrez que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0;1]$ $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
3) Démontrez que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique l ,dans l'intervalle $[0;\ 1]$.
4) Démontrez que pour tout n de N : $|u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{3}|u_n - l|$ puis que $|u_n - l| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
5) Déduisez-en la convergence de la suite u .

<u>Exercice : 4</u> (4points)

1) (E_0) désigne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$ .Déterminer les solutions générales de (E_0).
2) (E) est l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

a) Vérifier que la fonction h définie sur IR par $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

b) Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0) .

c) Déterminer toutes les solutions de (E).

d) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant les conditions initiales :
$f_0(0) = 4$ et $f_0'(0) = 0$.

<u>B</u>