Table des matières

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

1 Équation du 2^{nd} degré

Définition (Trinôme du second degré)

On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme :

$$ax^2 + bx + c \text{ avec } a,\ b \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

1.1 Forme canonique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \quad \text{or} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, la forme canonique de $f(x)$ est donnée par :

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]}$$

Exercice 1.1 (Exercice d'application)

Déterminer la forme canonique de chacun des trinômes suivants :

$A(x) = 3x^2 - 4x + 5$ $\qquad$ $B(x) = x^2 - 6x + 7$

$C(x) = -x^2 + 6x - 9$ $\qquad$ $D(x) = -2x^2 + 7x - 9$

Correction

$$\begin{aligned}A(x) &= 3x^2 - 4x + 5\\ &= 3\left[x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right]\\ &= 3\left[\left(x - \frac{4}{6}\right)^2 - \frac{16}{36} + \frac{5}{3}\right]\\ &= 3\left[\left(x - \frac{4}{6}\right)^2 - \left(\frac{16-60}{36}\right)\right]\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\boxed{A(x) = 3\left[\left(x - \frac{4}{6}\right)^2 + \frac{11}{9}\right]}$$

$$\begin{aligned}B(x) &= x^2 - 6x + 7\\ B(x) &= (x-3)^2 - 9 + 7\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\boxed{B(x) = (x-3)^2 - 2}$$

$$\begin{aligned}C(x) &= -x^2 + 6x - 9\\ C(x) &= -1\left(x^2 - 6x + 9\right) \qquad \text{or } x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9\\ C(x) &= -1\left[(x-3)^2 6 - 9 + 9\right]\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\boxed{C(x) = -(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned}D(x) &= -2x^2 + 7x - 9\\ &= -2\left[x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{9}{2}\right] \text{ or } \qquad x^2 - \frac{7}{2}x = \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\\ &= -2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{9}{2}\right]\\ &= -2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{49-72}{16}\right)\right]\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\boxed{D(x) = -2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]}$$

1.2 Résolution et factorisation

1.2.1 Résolution

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré ; la forme canonique de $f(x)$ est :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right].$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ) est appelé le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
Par suite

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

L'existence de solutions pour l'équation $f(x) = 0$ dépend de Δ

Si $\Delta < 0$ alors on a : $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, or $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$

Donc $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0 \Longrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} \neq 0$ or $a \neq 0$

Par conséquent : $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right] \neq 0$

D'où si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

Si $\Delta = 0$ alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$

Donc $f(x) = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

Ainsi $f(x) = 0$ si et seulement si $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ or $a \neq 0$.

Par suite on a :
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \text{ ou } \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

On a donc une racine double et on la note $\boxed{x_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
D'où si $\Delta = 0$ on a une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad \boxed{\mathcal{S} = \left\{x_0 = -\frac{b}{2a}\right\}}$$

Si $\Delta > 0$ alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$
Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Puisque $a \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \text{ ou } \left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &\iff x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Donc si $\Delta > 0$ on a deux solutions distinctes notées respectivement x_1 et x_2
Avec

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x_1; x_2\}}$$

1.2.2 Factorisation

Comme pour la résolution, la factorisation d'un trinôme du second degré dépend de son discriminant Δ

1. Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution et le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une racine double notée $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et $\boxed{f(x) = a\,(x - x_0)^2}$ est la forme factorisée du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$

3. Si $\Delta > 0$ alors la forme factorisée du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est : $\boxed{f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$

Exercice 1.2 (Exercice d'application)

1) Donner la forme factorisée des trinômes suivants :

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 24, \qquad g(x) = -x^2 + 3x - 2$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0$$

Correction

1) **Factorisation**

$f(x) = 2x^2 + 2x - 24$

On a : $\Delta = 2^2 - 4(2)(-24) = 196$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

Donc

$$x_1 = \frac{-2 - 14}{4} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2 + 14}{4} = 3$$

Ainsi la forme factorisée de $f(x)$ est : $\boxed{f(x) = 2\,(x + 4)\,(x - 3)}$

$g(x) = -x^2 + 3x - 2$

On a : $\Delta = 3^2 - 4\,(-1)\,(-2) = 9 - 8 = 1$

Donc

$$x_1 = \frac{-3 - 1}{2\,(-1)} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3 + 1}{2\,(-1)} = 1$$

Ainsi la forme factorisée de $g(x)$ est : $\boxed{g(x) = -(x - 1)(x - 2)}$

2) **Résolution**

D'après la question 1) on a : $f(x) = 2\,(x + 4)\,(x - 3)$

Ainsi $f(x) = 0 \iff 2\,(x + 4)\,(x - 3) = 0$ or $2 \neq 0$

Donc $(x + 4) = 0$ ou $(x - 3) = 0$

D'où $x = -4$ ou $x = 3$

Finalement $\boxed{\mathcal{S} = \{-4; 3\}}$

$g(x) = -(x-1)(x-2)$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Longleftrightarrow -(x-1)(x-2) = 0 \\ & x-1=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0 \\ & x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ \text{Finalment on a :} \quad & \mathcal{S} = \{1;2\} \end{aligned}$$

Remarque 1.1 (Discriminant réduit)

soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, lorsque $b = 2b'$ on notera le discriminant réduit :

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

Si $\Delta' > 0$ les racine de l'équation sont alors

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Application : Résoudre dans l'équation suivante : $6x^2 - 12x + 3 = 0$

Correction :
$5x^2 - 12x + 3 = 0$;
On calcule $\Delta' = b'^2 - ac$

$$\Delta' = (6)^2 - (5)(3) = 36 - 15 = 21$$

Donc les racines sont : $x_1 = \dfrac{6-\sqrt{21}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{6+\sqrt{21}}{5}$

Finalement on a : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{6-\sqrt{21}}{5}; \dfrac{6+\sqrt{21}}{5}\right\}}$

1.3 Somme et produit

Théorème 1.1 (Somme et produit des racines d'un trinôme)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, on a : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
On note :
la somme des racines $S = x_1 + x_2$ et le produit des racine $P = x_1 \times x_2$

En effet on a :

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\begin{aligned} P = x_1 \times x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b)^2 - (\Delta)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exercice 1.3

1) Sans calculer les racines de l'équation $2x^2 - \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) x - 9 = 0$, déterminer la somme et le produit de ces dernières
2) Soit l'équation $3x^2 + 7x - 10 = 0$ dont 1 est l'une des racines, déterminer l'autre racine sans calculer Δ

Correction

1) On a : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ et $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{9}{2}$

2) Puisque 1 alors on a : $1 \times x_2 = -\frac{10}{3}$ ainsi $x_2 = -\frac{10}{3}$

Ou bien $1 + x_2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{3} - 1 = -\frac{10}{3}$

Remarque 1.2

Si le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ a pour solutions x_1 et x_2 alors x_1 et x_2 sont aussi solutions de l'équation $a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = 0$ or $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$. D'où x_1 et x_2 sont solutions de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exercice 1.4

1) Trouver 2 nombres ayant pour somme $S = 8$ et pour produit $P = 15$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y & = 31 \\ xy & = 240 \end{cases}$$

Correction

1) Les nombres 8 et 15 sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, c'est à dire :

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

On trouve donc

$$\boxed{x = 5 \quad \text{et} \quad y = 3 \quad \text{ou} \quad x = 3 \quad \text{et} \quad y = 5}$$

2)

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y & = 31 \\ xy & = 240 \end{cases}$$

x et y sont solutions de l'équation $x^2 - 31x + 240 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-31)^2 - 4(1)(240) \\ &= 961 - 960 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $$x = x_1 = \frac{31 - 1}{2} = 15 \quad \text{et} \quad y = x_2 = \frac{31 + 1}{2} = 16$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(15; 16), (16; 15)\}}$$

2 Équation se ramenant à une équation du second degré

2.1 Équation bicarrée

Définition

Toute équation de la forme $ax^4+bx^2+c=0$ est dite équation bicarrée, avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une équation bicarrée, il faut procéder à un changement de variable en posant $X = x^2$

Exercice 2.1 (Équations bicarrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ 2)$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Correction

$$2x^4 - x^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

Posons $X = x^2$ dans l'équation (1) et elle devient : $2X^2 - X - 1 = 0$ (2)

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{1-3}{2\times 2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ \\ X_2 = \dfrac{1+3}{2\times 2} = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = x^2 = -\dfrac{1}{2} \text{ impossible} \\ \\ X_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 1\}}$$

$$2) \qquad x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \qquad (1)$$

Posons $X = x^2$ dans l'équation (1) et elle devient : $X^2 - 5X + 6 = 0 \qquad (2)$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-5)^2 - 4(1)(6)\\ &= 25 - 24\\ &= 1\end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$
$$X^2 = x_1 \qquad \text{et} \qquad X^2 = x_2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & = -\sqrt{2} \text{ ou } x_1 = \sqrt{2} \\ \\ x_2 & = -\sqrt{3} \text{ ou } x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\}}$$

2.2 Autres formes d'équations

Exercice 2.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1) $x^2 - |x| - 2 = 0 \quad (\text{poser } X = |x|)$
2) $5x - \sqrt{x} - 1 = 0 \quad (\text{poser } X = \sqrt{x})$

Correction
1) $x^2 - |x| - 2 = 0$ (1) posons $X = |x|$, ainsi l'équation (1) devient :

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X^2 - X - 2 = 0 \ \ (2) \\ \\ X^2 + X - 2 = 0 \ \ (3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow X^2 - X - 2 = 0 \ \ (2)$$
$$\Longleftrightarrow X = -1 \ \text{ ou } \ X = 2$$

On prend la valeur positive soit $X = 2$

$$\Longleftrightarrow X^2 + X - 2 = 0 \ \ (3)$$
$$\Longleftrightarrow X = 1 \ \text{ ou } \ X = -2$$

On prend la valeur positive soit $X = 1$

$$\Longleftrightarrow X = 1 \ \text{ ou } \ X = -2$$

Finalement on a :

$$\boxed{\{1;2\}}$$

2) $5x-\sqrt{x}-1=0$ Posons $X=\sqrt{x}$. Ainsi l'équation devient :

$$5X^2-X-1=0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2-4(5)(-1)\\ &= 1+20\\ &= 21\end{aligned}$$

$$X_1=\frac{1-\sqrt{21}}{10} \qquad X_2=\frac{1+\sqrt{21}}{10}$$

$$\text{or} \qquad \frac{1-\sqrt{21}}{10}<0 \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{21}}{10}>0$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{10}\right\}}$$

2.3 Équations symétriques

Définition (Équation symétrique)

Toute équation de la forme $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ avec $a\neq 0$ est appelée une équation symétrique

Pour résoudre ce type d'équation, on factorise d'abord par x^2 puis on procède à un changement de variable en posant $X=x+\dfrac{1}{x}$

Exercice 2.3

Soit $f(x)=6x^4-5x^3-13x^2-5x+6$
1) Montrer que0 n'est pas solution de l'équation de $f(x)=0$
2) Déterminer $g(x)$ telle que $f(x)=x^2.g(x)$
3) Montrer que $f(x)=0$ si et seulement si $g(x)=0$
4)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=0$. On pose $X=x+\dfrac{1}{x}$

Correction

1) Montrer que0 n'est pas solution de l'équation de $f(x)=0$
On a $f(0)=6(0)^4-5(0)^3-13(0)^2-5(0)+6=6$

Donc $f(0) = 6$
D'où 0 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.

2) Déterminons $g(x)$ pour que $f(x) = x^2.g(x)$
Nous avons :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 6x^4 - 5x^3 - 13x^2 - 5x + 6 \\
&= x^2\left(6x^2 - 5x - 13 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) \\
&= x^2.g(x) \qquad\qquad \text{avec} \quad g(x) = \left(6x^2 - 5x - 13 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

3) Montrons que $f(x) = 0$ si et seulement si $g(x) = 0$ Si

$$g(x) = 0 \text{ alors } f(x) = x^2.0 = 0$$

Donc

$$x^2.g(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } g(x) = 0$$

Or dans la question 1) on avait $x \neq 0$.
Donc

$$g(x) = 0$$

4)Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$. On a : $g(x) = \left(6x^2 - 5x - 13 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$
On pose $X = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
g(x) &= \left(6x^2 - 5x - 13 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) \\
&= 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 13 \\
&= 6\left(X^2 - 2\right) - 5X - 13 \\
&= 6x^2 - 5X - 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit} \qquad & \Delta = 5^2 - 4(6)(-25) = 25 + 600 = 625 \quad \text{et donc} \quad \sqrt{\Delta} = 25 \\
& \Longrightarrow X_1 = \frac{5 - 25}{12} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5 + 25}{12} \\
& \Longrightarrow X_1 = -\frac{5}{3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

En retournant au changement de variable,on obtient :

$$-\frac{5}{3} = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow -\frac{5}{3} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\text{Ce qui donne} \qquad -5x = 3x^2 + 3x \Longrightarrow 3x^2 + 5x + 3 = 0$$
$$\text{Soit} \qquad \Delta = 25 - 36 = -11 < 0$$

Ce qui signifie que cette équation ainsi obtenue n'admet pas de solution

$$\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{5}{2} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$\text{Ce qui donne} \qquad 5x = 2x^2 + 2x \Longrightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0$$
$$\text{Soit} \qquad \Delta = 25 - 16 = 9 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$
$$\text{Ainsi} \qquad x_1 = \frac{5-3}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+3}{4}$$
$$\text{Donc} \qquad x_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 2$$

Finalement on a :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}}$$

3 Équation paramétrique

Définition (Équation paramétrique)

On appelle équation paramétrique de paramètre m une équation d'inconnue x dont on se propose déterminer le nombre de solutions, leurs signes,..., suivant les valeurs du paramètre m

Exercice 3.1

Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les solutions de l'équation suivante :

$$(E) : (m-1)\,x^2 - 2\,(m+2)\,x + m - 4 = 0$$

<u>*Correction*</u>

Si $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

alors l'équation (E) devient $-6x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$

Si $m-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ Alors

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m-1)(m-4) = 9m$$

Si $\Delta > 0$ c'est à dire $9m > 0 \Longleftrightarrow m > 0$
Et donc, si $m \in]0;+\infty[$ on a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{(m+2)-3\sqrt{m}}{(m-1)} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{(m+2)+3\sqrt{m}}{(m-1)}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{(m+2)-3\sqrt{m}}{(m-1)} \; ; \; \frac{(m+2)+3\sqrt{m}}{(m-1)} \right\}}$$

Si $\Delta' = 0 \Rightarrow m = 0$ et l'équation admet une racine double $x_0 = -\dfrac{b'}{a}$ c'est à dire dans ce cas-ci $x_0 = \dfrac{(m+2)}{(m-1)}$ avec $m = 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-2\}}$

Si $m < 0 \Rightarrow \Delta' < 0$ alors l'équation (E) n'admet pas de racine.

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

4 Inéquation du 2^{nd} degré

4.1 Signe d'un trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$
Étudions le signe de $f(x)$ suivant celui de Δ

- 1^{er} cas
  Si $\Delta < 0$ alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ or $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$
  Donc $\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right] \geqslant 0$
  On en déduit alors que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ a le même signe que a
  D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	signe de a

- $2^{\text{ème}}$ cas
  Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ or $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$
  On en déduit alors que $\forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$, $f(x)$ a le même signe que a
  D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

  En fin pour $x = -\dfrac{b}{2a}$, $f(x) = 0$
- $3^{\text{ème}}$ cas
  Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de $f(x)$
  En supposant que $x_1 < x_2$, on aura le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exercice 4.1 (signe d'un trinôme)

Étudier le signe de chacun des trinômes suivants :
$f(x) = 2x^2 + x + 3$; $g(x) = x^2 + x - 6$; $h(x) = x^2 + 2x + 1$

Correction

$$\bullet\ f(x) = 2x^2 + x + 3$$

On calcule d'abord le discriminant Δ :

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(3) = -23 < 0$$

Alors $f(x)$ a le même signe que 2 sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = 2x^2 + x + 3$	$+$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

$$\bullet\, g(x) = x^2 + x - 6$$

On calcule d'abord le discriminant Δ

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2\times 1} = -\frac{6}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+5}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$g(x) = x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$g(x) > 0 \;\text{ sur }\;]-\infty, -3[\,\cup\,]2, +\infty[$$

$$g(x) < 0 \;\text{ sur }\;]-3, 2[$$

$$g(x) = 0 \;\text{ pour }\; x = -3 \;\text{ et }\; x = 2$$

$$\bullet\, h(x) = x^2 + 2x + 1$$

On calcule d'abord le discriminant Δ

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

$$x_0 = -\frac{2}{2\times 1} = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h(x) = x^2 + 2x + 1$		$+$	0	$+$	

$$g(x) > 0 \;\text{ sur }\;]-\infty, -1[\,\cup\,]-1, +\infty[$$

$$g(x) = 0 \;\text{ pour }\; x = -1$$

4.2 Inéquation du second degré

Théorème 4.1

Pour résoudre une inéquation du second degré, il faut étudier le signe du trinôme associé à celle-ci puis déterminer le ou les intervalle(s) où l'inégalité est vérifiée.

Exercice 4.2 (Exercice d'application)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $3x^2 - 4x + 5 < 0$ 2) $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$

3) $-x^2 + 6x - 9 \leqslant 0$ 4) $-2x^2 + 7x - 9 > 0$

Correction

1) $3x^2 - 4x + 5 < 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(5) = 16 - 60 = -44 < 0$$

Le trinôme $3x^2 - 4x + 5$ est du signe de 3 sur $\mathbb{R}$ donc positif

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2 - 4x + 5$	$+$	

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$

2) $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(7) = 36 - 28 = 8 \qquad \text{et } \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 3 - \sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{2}$		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2 - 6x + 7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; 3-\sqrt{2}\right] \cup \left[3+\sqrt{2}; +\infty\right[}$$