RECUEIL DES NOMBRES COMPLEXES PROPOSES AU BAC S2 SENEGALAIS DE 1988 à 2020

EXERCICE N°01 BAC S2 SENEGAL 1988

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z+3i}{i\bar{z}-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2. Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, M, M' et M'' les points d'affixes respectives : $-3i$, 1, z, $\bar{z}$ et $i\bar{z}$, z étant élément de D_f.

a) Placer les points A ; B, M, M' et M'' (on choisira pour ce dessin : le point $M(z)$ sur la droite (AB) avec $Re(z) > 0, Im(z) > 0.\ \big(Re(z) > Im(z)\big)$.

b) Déterminer l'ensemble S_1 des points M tels que : $M'' = B$.

c) Déterminer l'ensemble S_2 des points M tels que : $M'' = M$, le dessiner.

d) Donner une interprétation géométrique des arguments de : $(z + 3i)$ et $(i\bar{z} - 1)$. En déduire une interprétation géométrique de l'argument de $f(z)$.

e) Déterminer l'ensemble S_3 des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit imaginaire pur.

f) En déduire l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{BM''}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux et le dessiner.

EXERCICE N°02 BAC S2 SENEGAL 1989

Soit le polynôme P défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par :

$$P(z) = iz^3 + \big(1 - i\sqrt{3}\big)z^2 - \big(\sqrt{3} + 1\big)z + i$$

1. a) Calculer $P(i)$.

b) En déduire dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des racines de l'équation : $P(i) = 0 \qquad (\alpha)$.

2. On appelle z_1 la solution de l'équation (α) dont la partie réelle est strictement positive.

3. Soit $Z = z_2 - 1$.

a) Mettre Z sous forme trigonométrique.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE N°03 BAC S2 SENEGAL 1990

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe z associe le nombre complexe z définie par :

$$Z = \big(1 + i\sqrt{3}\big)z + \sqrt{3}(1 - i)$$

1. Montrer que le nombre $\omega = 1 + i$ est invariant par f.

2. Montrer que $Z - \omega = \big(1 + i\sqrt{3}\big)(z - \omega)$

3. Soit m , M, W les représentant dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ des nombres complexes z, Z, ω.

a) Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $\frac{Z-\omega}{z-\omega}$.

b) Montrer que M est l'image de m dans la composée d'une rotation dont on précisera le centre et l'angle, et d'une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

c) Faire une figure représentant W, m, M.

d) Montrer que le triangle (WmM) est un triangle rectangle.

4. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\left(\frac{Z-\omega}{z-\omega}\right)^n$ où n est un entier naturel, en fonction de n.

EXERCICE N°04 BAC S2 SENEGAL 1991

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par : $P(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 24X + 40$

1. Montrer qu'il existe deux complexes imaginaires purs solutions de $P(X) = 0$.

2. En déduire une factorisation de $P(X)$ en produit de deux polynômes du 2ème degré à coefficients réels.

3. Résoudre $P(X) = 0$.

EXERCICE N°05 BAC S2 SENEGAL 1992

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, soit M le point d'affixe z, A celui d'affixe i et B celcui d(affixe $(-i)$. On pose : $Z = \frac{z-i}{z+i}$.

1. a) Déterminer l'ensemble D des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble C des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

2. a) Interpréter géométriquement les modules de : $z - i$ et $z + i$.
Montrer que $|Z| = 1$, si et seulement si z est réel.
b) Soit n un entier naturel non nul et a un réel de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
Déduire de la question précédente que l'équation : (E): $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = \cos 4a + i \sin 4a$, n'admet que des solutions réelles. (On ne demande pas de les calculer)
c) Résoudre l'équation : $Z^2 = \cos 4a + i \sin 4a$
En déduire les solutions de (E).

✍ EXERCICE N°06 BAC S2 SENEGAL 1993

On considère le nombre complexe $c = 1 - i$.
1. Calculer c^2 et c^5 . Dans un plan muni d'un repère orthonormé, marquez les points qui ont pour affixe, c, c^2 et c^5.
2. A tout point M, d(affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z', avec : $z' = cz + c^5$. On définit ainsi une transformation T du plan. Déterminer l'affixe du point S, invariant par T. Précisez la nature et ses éléments caractéristiques.

✍ EXERCICE N°07 BAC S2 SENEGAL 1995

On considère le polynôme P de variable complexe z définie par $P(z) = z^3 + iz^2 - 3z + 5i$
1. Calculer $P(i)$ puis déterminer toutes les racines de $P(z)$on noteraz$_1$ la racine dont la partie réelle est négative et z_2 l'autre racine.
1. a) Ecrire sous forme trigonométrique que le nombre complexe $\frac{z_1-i}{z_2-i}$.
b) Dans le plan complexe de repère$(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par $A(i), B\ (z_1)$ et $C(z_2)$
Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC.
2. On considère $A(i), B(-i)$ et $M(z)$ on pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$
a) Déterminer l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que Z soit réel.
b) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tel que$Z$ soit imaginaire pur
1. a) Interprétez géométriquement les modules de$z - i$et $z + i$. b) Montrer que $|Z| = 1$ si et seulement si z est réel
c) Sot n$\in \mathbb{N}^*$et $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$déduire de la question précédente que l'équation
(E): $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = cos4a + isin4a$ n'admet que des solutions réelles.(On ne demande pas de les calculer).
d) Résoudre l'équation $Z^2 = cos4a + isin4a$. En déduire les solutions de (E).

✍ EXERCICE N°08 BAC S2 SENEGAL 1996

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(sin^2\alpha)z^2 + (sin2\alpha)z + 1 + cos^2\alpha = 0; 0 \leq \alpha \leq \pi$.
2. On désigne par Z' et Z'' les solutions obtenues avec $Im(Z') > 0$ .Vérifier que $Z'^2 + Z''^2$ est un réel indépendant de α.
3. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct$(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par M' et M''les points respectives Z' et Z''.
a) Déterminerαtel que : $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \\ M'M'' = 2\sqrt{2} \end{cases}$
b) α étant le réel trouvé au 3-a-, montrer que M' et M'' appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

✍ EXERCICE N°09 BAC S2 SENEGAL 1997

1. a) Calculer le module et un argument du nombre complexe : $w = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$ b) En déduire ses racines carrées.
2. Résoudre dans C L'équation suivante : $z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$.
3. Soit z_1 la solution imaginaire pure et z_2 l'autre solution, montrer que $\frac{z_2-2i}{z_1-2i} = w$
4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ soit A, B et C les points d'affixes respectives $2i, z_1, z_2$. Préciser la nature du triangle ABC en utilisant1. a)

✍ EXERCICE N°10 BAC S2 SENEGAL 1998

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :a)$z^2 - 2z + 5 = 0$ b)$z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

2. On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal$(O;\vec{u};\vec{v})$les points A, B, C et D d'affixes respectives
$1+2i, 1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i$ et $1-2i$.
a) Placer A, B, C, D dans le plan (P)
b) Vérifier que$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=i\sqrt{3}$en déduire la nature du triangle ABD.
c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont ont précisera le centre et le rayon.
2. On considère l'équation (E): $z^2-2(1+2cos\theta)z+5+4cos\theta=0;\ \theta\in\mathbb{R}$.
a) Résoudre (E)dans $\mathbb{C}$ b) Montrer que les points images des solutions de (E)appartiennent à (C).

EXERCICE N°11 BAC S2 SENEGAL 1999

On considère l'équation : (E): $z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-1-2i=0$
1. a) Vérifier que(E)admet une solution réelle. b) Achever la résolution de(E).
2. Dans le plan complexe on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1$, $z_B=-2+i$ et $z_C=i$.
a) Déterminer le module et un argument de$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
b) En déduire la nature du triangle ABC
c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

EXERCICE N°12 BAC S2 SENEGAL 2000

On considère les points A_1, A_2et A_3 d'affixes respectives : $z_1=1, z_2=1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_3=\frac{5+i\sqrt{3}}{4}$
1. a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes z_2-z_1 et z_3-z_1.
b) Donner une écriture trigonométrique de$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.
En déduire les valeurs exactescos$(\frac{\pi}{12})$et sin$(\frac{\pi}{12})$.
2. Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3et A_1 en A_1
a) Préciser les éléments caractéristiques de S
b) On désigne par M' d'affixe z' l'image de M d'affixe z.
Exprimer z' en fonction de z. En déduire l'image par S du point B d'affixe$1-4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

EXERCICE N°13 BAC S2 SENEGAL 2001

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal direct$(O;\vec{u};\vec{v})$.
1. Soit f l'application de$\mathbb{C}\setminus\{2I\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}$.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $f(z)=z$.Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
b) Calculer $z_1^4+z_2^4$.
2. Soit $M(z)$ un point de (P).Soit(Γ)l'ensemble des points $M(z)$tels que $f(z)$ soit imaginaire pur, donner une équation cartésienne de(Γ),Tracer(Γ).
3. Montrer que $|z|=1\Leftrightarrow|f(z)|=1$

EXERCICE N°14 BAC S2 SENEGAL 2002

1. Montrer que dans $\mathbb{C}$ la somme des racines $n^{ième}$ de l'unité est égale à zéro $n\geq 2$.
2. En utilisant les résultats du 1) montrer que $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$est solution de l'équation$4x^2-2x-1=0$.
3. En déduire les valeurs exactes de$cos\left(\frac{\pi}{5}\right), cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE N°15 BAC S2 SENEGAL 2003

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation
$$(E): z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0.$$
1. a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer
b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions (E) c) Donner l'ensemble des solutions de (E).
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal$(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soit A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$. Soit $G=bar\{(A,2),(B,-2),(C,1)\}$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 2i$ et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$et que ces affixes sont dans cet ordre en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.
b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques.

✍ EXERCICE N°16 BAC S2 SENEGAL 2004

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$la suite géometrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison$\frac{1}{2}$. Soit$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$. Pour tout entier n∈N, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument estV_n.
1. a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n b) Enduire z_n.
2. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.
3. Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$et M_n le point d'affixe z_n.
a) Déterminer la nature de la transforme F qui au point M_n associe le point M_{n+1}d'affixe z_{n+1}.
b) Donner ses éléments caractéristiques.
4. Pour tout entier naturel n, on pose :$Z_n = z_0z_1z_2. \dots . z_n$
a) Exprimer en fonction de n un argument de Z_n. b) Démontrer que si n est impair alors Z_n set réel.

✍ EXERCICE N°17 BAC S2 SENEGAL 2005

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.
2. a) Développer $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$ b) Soit l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.
2. En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, Déterminer sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique les racines de (E)
3. En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

✍ EXERCICE N°18 BAC S2 SENEGAL 2006

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(E) : z^2 + 2z + 2 = 0$.
b) On désigne parz_1 la solution de (E)dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution de (E).
Dans le plan complexe rapporté d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$d'unité graphique 2cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et $\sqrt{3} + i$. Placer les points A, B et C.
c) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$
3. On considère l'équation différentielle : $ay'' - by' + cy = 0$, où a, b et c désignent trois paramètres éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3,4, 5,6\}$. Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.
a) Justifier que l'équation différentielle : $ay'' - by' + cy = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto (Acosx + Bsinx)e^x$ où A et B sont des réels si et seulement si $1 + i$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en $zaz^2 + bz + c = 0$.
b) Calculer la probabilité de l'évènement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme
$x \mapsto (Acosx + Bsinx)e^x$. A et B étant des constantes réelles

✍ EXERCICE N°19 BAC S2 SENEGAL 2007

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(E): z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$
1. a) Déterminer la solution réelle de cette équation.
b) Montrer que i est une solution de cette équation.
c) Déterminer la troisième solution de cette équation.
2. Soient les points A, B et C d'affixes respectives $1, i$ et $2 + i$.
a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ b. En déduire la nature du triangle ABC.
c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$
d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon r à déterminer.

✍ EXERCICE N°20 BAC S2 SENEGAL 2008

1. On considère l'équation $(E): z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$
a) Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).

b) Achever la résolution de (E) (on appellera $z_1$la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé$(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i, 3+\ 3i$ et $3-2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère. b) Calculer $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$. En déduire la nature de ABC

3. Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

a) Donner une écriture complexe de f. b) Donner les éléments caractéristiques de f.

✍ EXERCICE N°21 BAC S2 SENEGAL 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=2cm$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ léquation $z^3=1$.

Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) En remarquant que $2^3=8$, déduire de 1) a) les solutions de l'équation $z^3=8$

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-1+i\sqrt{3}, 2$ et $-1-i\sqrt{3}$.

a) Placer ces points dans le repère

b) Calculer le module et un argument de $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

c) En déduire la nature du triangle ABC

3. On considère f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$tel que $z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}z$

a) Déterminer la nature de f puis donner ses éléments géométriques caractéristiques.

b) Déterminer les affixes des points A' et C' images respectives des points A et C par f.

c) En déduire l'image de la droite (AC) par f.

✍ EXERCICE N°22 BAC S2 SENEGAL 2011

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ direct.

I. Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $z=x+iy$, x et y réels.

1. Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est la partie réelle ? Quelle est la partie imaginaire ?

2. Quel est le module de z ?

3. Soit α un argument de z pour $z\in\mathbb{C}^*$. Déterminer le cosinus et le sinus de α en fonction de z.

4. Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z)$ l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ. Exprimer z' en fonction de z et θ.

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue $z$qui suit. (E):$\frac{1}{2}z^2+4z\sqrt{3}+32=0$.

1. Résoudre l'équation (E).

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=-4\sqrt{3}-4i$ et $b=-4\sqrt{3}+4i$.

Calculer OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB

3. On désigne par C le point d'affixe $\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des points pondérés $(O,1);(D,-1)$ et$(B,-1)$.

a) Montrer que le point G a pour affixe $g=-4\sqrt{3}+6i$.

b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique : $1cm$)

5. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC})$. En déduire la nature du triangle GAC

✍ EXERCICE N°23 BAC S2 SENEGAL 2012

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ direct. Unité 2 cm

1. Résoudre dans$\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

$$z^3-2(1+i)z^2+2(1+2i)z-4i=0. \quad (E)$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives$1+i$, $2i$ et i. Placer les points A, B et C dans le repère.

3. Pour tout nombre complexe$z\neq 1+i$, on associe le nombre complexe z' defini par : $z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$

a) Interpréter géométriquement $|z'|$etarg(z').

b) Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur

c) Déterminer puis construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z'|=2$.

4. Soit S la similitude directe de centre C transformant Aen B.

a) Déterminer la nature du triangleABC.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S

c) Déterminer les images par Sde (E_1) et (E_2) puis les construire. (Utiliser des couleurs différentes)

EXERCICE N°24 BAC S2 SENEGAL 2013

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$. S est la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec $M' = S(M)$

1. Exprimer z' en fonction de z

2. On définit la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $\begin{cases} \mathrm{M_0 d'affixe}\ z_0 = 1+i \\ \mathrm{M_n = S(M_{n-1})}\ \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

z_n est l'affixe de M_n, pour tout entier naturel$n$.

a) Déterminer les affixes des points M_1, M_2 et M_3

b) Exprimer z_n en fonction de z_{n-1} pour $n \geq 1$ c. En déduire que $z_n = \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n z_0$

c) Soit $a_n = |z_n|$, montrer que a_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

d) Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

EXERCICE N°25 BAC S2 SENEGAL 2014

A. Questions de cours

1. Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul
2. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$, d' angle θ.

B. On donne $\boldsymbol{z_0 = 1 - i\sqrt{3}}$

1. Donner une écriture trigonométrique de z_0.
2. Montrer que : ${z_0}^4 = -8 + 8\,\mathrm{i}\sqrt{3}$
3. Résoudre dans ₵ l'équation$z^4 = 1$.
4. En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^4 = 1$

5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 2 cm,
Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.
6. Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle$\frac{\pi}{2}$
7. Vérifier que : r (A) = C ; r (C) = B et r (B) = D.
8. En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°26 BAC S2 SENEGAL 2015

1. Soit $P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que $2 + i$ est une racine de $P(z)$

b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$dans $\mathbb{C}$.

2. Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A, B\ et\ C$ d'affixes respectives $2+i, -1-2i\ et -4+i$.

a) Placer les points $A, B\ et\ C$ puis calculer les distances ABet BC.

b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_c - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\ [2\pi]$.

c) En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC.

3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme Aen C.

a) Montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$

b) Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r

4. Soit $T: M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles$T$ est une homothétie de rapport 2.

b) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α verifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}$.

5. On considère la transformation $g = roT$. On suppose dans ce qui suit $\alpha = 1 - i$.

a) Montrer que l'application h associée à g est définie par : $h(z) = 2iz - 2$.

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de g.

EXERCICE N°27 BAC S2 SENEGAL 2016

1. On considère l'équation (E): $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$ où z est un nombre complexe.

a) Déterminer la solution réelle de (E).
b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E)
2. On pose $a = 3; b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C daffixes respectives a, b et c. Soit M le point daffixe z distinct de A et de B.
a) Calculer $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.
b) On pose $= \frac{z-3}{z-5+2i}$. Donner une interprétation géométrique de Z.
En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit un reel non nul.
3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'affixe $2 - i$.
a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $\frac{-\pi}{2}$
b) Déterminer l'image (C') de (C) par r. Construire(C').

EXERCICE N°28 BAC S2 SENEGAL 2017

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considere le polynome $P(z)$ défini par :
$P(z) = z^4 + (3 - i)z^3 + (4 - 3i)z^2 + (12 - 4i)z - 12i$ et l'équation (E): $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
1. a) Montrer que $P(z)$ est divisible par $(z - i)(z + 3)$ b) Factoriser $P(z)$
c) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sous la forme trigonométrique.
2. a) Déterminer les nombres complexes α et β solutions de l'équation (E) et $Im(\alpha) > 0$
b) Ecrire α et β sous la forme trigonométrique.
3. On considère un dé bien équilibré à six faces et sur chaque face, on inscrit l'un des nombres :
$i; 2i; -2i;\ \sqrt{3} + i;\ \sqrt{3} - i$ et -3.
On lance ce dé et on note z le nombre qui apparait sur sa face supérieure.
a) Calculer la probabilité de chacun des événements A et B suivants :
A: « z est réel » B: « z est imaginaire pur »
b) On lance 5 fois de suite ce même dé. Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois la réalisation de B.
4. On définit la variable aléatoire θ qui, à chaque nombre z inscrit sur une face, associe son argument principal.
a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par θ. b. Déterminer la loi de probabilité θ.
b) Calculer son espérance mathématique $E(\theta)$.

EXERCICE N°29 BAC S2 SENEGAL 2018

1. Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$. En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$.
2. On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.
a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $z_C = -1$
a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B.
b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.
4. Soit D le symetrique du point A par rapport à l'axe réel.
a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique.
b) Démontrer que $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD.
5. Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O. On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B.
a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques.
b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon 1. Déterminer l'image (C') de (C) par S.

EXERCICE N°30 BAC S2 SENEGAL 2019

PARTIE A :
Pour tout complexe z on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.
1. Déterminer le polynôme Q tel que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$.
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.
3. Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométriques puis les représenter dans le plan complexe $\mathcal{G}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

PARTIE B :

Considérons les points A, B, C et D du plan $\mathscr{P}$ tels que : $A\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B(-1+i)$; $C(-1-i)$ et $D\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D. Déterminer l'écriture complexe de r.
3. Quelle est la nature du triangle ΩAD ?
4. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD.
5. On pose $u_n = (z_A)^n$, $nn \in \mathbb{N}^*$, où z_A est l'affixe du point A.

Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle u_n est un réel.

6. Donner la forme algébrique de u_{2019}.

✍ EXERCICE N°31 BAC S2 SENEGAL 2020

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

PARTIE A :

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Compléter les propriétés sur les modules et arguments suivantes :

a) $|z^n| = \cdots$; b) Si z' est non nul, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \cdots$

2. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Donner l'interprétation géométrique de :

a) $|z_B - z_A|$; b) $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}\right)$.

3. Rappeler la formule de Moivre.

PARTE B :

Soit s une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3 z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

1. On donne $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.
2. Déterminer les nombres complexes a pour lesquels :

a. s est une translation.

b. s est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

c. s est une homothétie de rapport -8.