COURS DE MATHÉMATIQUES - PREMIÈRE S

APPLICATION ET GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Monsieur DIAGNE [1]

Dernière version : 26 décembre 2021

Document diffusé via le site SUNUMATHS [2]

1. Professeur de Mathématiques en service au lycée de Dimath
2. www.sunumaths.com

Table des matières

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS.

COMPÉTENCES EXIGIBLES

- Déterminer graphiquement l'image directe et l'image réciproque d'une partie d'un ensemble.
- Reconnaître graphiquement une application bijective.
- Déterminer l'application réciproque.
- Déterminer et reconnaitre la restriction d'une application
- Déterminer graphiquement l'image ou l'image réciproque d'un intervalle.
- Construire, à partir de la représentation graphique d'une fonction, celles des fonctions qui lui sont associées.
- Démontrer qu'un point est centre de symétrie de la représentation graphique d'une fonction.
- Démontrer qu'une droite est axe de symétrie de la représentation graphique d'une fonction.
- Construire la représentation graphique de la réciproque d'une fonction bijective.

1 Rappels sur les fonctions

1.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition (Fonction)

Soient A et B deux ensemble et f une relation (une correspondance).
$f : A \to B$ (lire f définie de A vers B) est une fonction si pour tout élément de A, on lui associe au plus un élément de B. (i.e 0 ou 1)

Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$ alors on dit que que f est une fonction numérique d'une variable réelle et on la note :

$$\begin{aligned} f : & A \to B \\ & x \mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

On lit : (f la fonction définie de A vers B qui, à chaque x, associe $f(x)$)
A est appelé **ensemble de départ**, B est appelé **ensemble d'arrivé**, x est l'antécédent de y par f et y est l'image de x par f

1.2 Ensemble de définition

Soit f une fonction numérique, le domaine de définition est l'ensemble des réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)$ (i.e : $f(x)$ existe). Autrement dit, le domaine de définition est l'ensemble des réels possédant une image par f
On le note : $\mathscr{D}_f$

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$$

Retenons : Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, U et V des polynômes :

— Si f est un polynôme alors $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

— Si $f(x) = \dfrac{U(x)}{V(x)}$ alors $f(x)$ existe si et seulement si $V(x) \neq 0$

— Si $f(x) = \sqrt{V(x)}$ alors $f(x)$ $\exists$ si et seulement si $V(x) \geq 0$

— Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{U(x)}{V(x)}}$ alors $f(x)$ $\exists$ si et seulement si $\dfrac{U(x)}{V(x)} \geq 0$ et $V(x) \neq 0$

— Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{U(x)}}{\sqrt{V(x)}}$ alors $f(x)$ $\exists$ si et seulement si $U(x) \geq 0$ et $V(x) > 0$

— Si $f(x) = \dfrac{U(x)}{\sqrt{V(x)}}$ alors $f(x)$ $\exists$ si et seulement si $V(x) > 0$

— Si $f(x) = \sqrt{U(x)} \pm \sqrt{V(x)}$ alors $f(x)$ $\exists$ si et seulement si $U(x) \geq 0$ et $V(x) \geq 0$

Exercice 1.1 (Exercice D'application)

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ 2) $g(x)) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{-2x^2}$

3) $h(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 2}$ 4) $i(x) = \frac{x^4 - 3x + 4}{\sqrt{x-2}}$

5) $j(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 - 1} + 2x - 3}$ 6) $l(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{1-x}}$

Réponses :

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathscr{D}_h = [1;2]$, $\mathscr{D}_i =]2;+\infty[$

$\mathscr{D}_j = \left[\frac{6-\sqrt{6}}{3};+\infty\right[$ $\mathscr{D}_l = [-2;2]$

1.3 Courbe représentative

Définition (Courbe représentative)

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ où x décrit $\mathscr{D}_f$ est appelé *courbe représentative* (ou encore représentation graphique) de la fonction f. On la note $\mathscr{C}_f$

On dit que la courbe C_f a pour équation $y = f(x)$

1.4 Image directe, image réciproque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

— L'image directe de l'intervalle I notée $f(I)$ est donnée par :
$f(I) = \{x \in I / f(x) \in f(I)\}$, $f(I) = J$

— L'image réciproque de l'intervalle I notée $f^{-1}(J)$ est donnée par :
$f^{-1}(J) = \{x \in I / y = f(x) \in J\}$, $f^{-1}(J) = I$

Exercice 1.2 (Image directe, Image réciproque)

$I)$ Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1. Calculer l'image directe de 3, de 0 et de -1
2. Calculer l'image réciproque de 12 et celle de 6

$II)$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 3 \end{aligned}$$

1. Calculer l'image directe de $I = [-1;5]$
2. Calculer l'image réciproque de $[-10;7]$

Correction :

$I-1$. Calculons l'image directe de 3, de 0 et de -1

$f(1)=(3)^2-3(3)+2=2 \qquad f(0)=0^2-3(0)+2=2$

$f(-1)=(-1)^2-3(-1)+2=6$

$I-2$. Calculons l'image réciproque de 12 et celle de 6

$$\begin{aligned} f(x)=12 &\Longleftrightarrow x^2-3x+2=12 \\ &\Longleftrightarrow x^2-3x-10=0 \\ &\Delta=49, \quad x_1=-2, \quad x_2=5 \end{aligned}$$

-2 et 5 sont les images réciproques de 12

De même, -1 et 4 sont les images réciproques de 6

$II-1$. Calculons l'image directe de $I=[-1;5]$

$$\begin{aligned} \text{On a : } & x\in[-1;5] \\ & -1\leq x\leq 5 \\ & -2\leq 2x\leq 10 \\ & 1\leq 2x+3\leq 13 \\ & 1\leq f(x)\leq 13 \end{aligned}$$

Donc $f(I)=f([-1;5])=[1;13]$

$II-2$. Calculons l'image réciproque de $[-10;7]$

$$\begin{aligned} \text{On a : } & -10\leq f(x)\leq 7 \\ & -10\leq 2x+3\leq 7 \\ & -13\leq 2x\leq 4 \\ & -\frac{13}{2}\leq x\leq 2 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}([-10;7])=\left[-\frac{13}{2};2\right]$

1.5 Restriction et prolongement

Définition (Restriction et prolongement)

Soit f une fonction de l'ensemble A vers un ensemble B et C une partie non vide de l'ensemble de définition de f. La restriction de f à C est la fonction g telle que :

$$\begin{aligned} g: C &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

g est une restriction de f à C et est notée $g_{|I}$

f est un prolongement de g à A

$C\subset A$ et $\forall x\in C, g(x)=f(x)$

1.5.1 Exemple

: Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x|x|$.
La restriction de f à $\mathbb{R}^-$ est la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^- &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x^2 \end{aligned}$$

Exercice 1.3 (Exercice d'application)

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |6-2x|$. Définir la restriction g de la fonction f à $[3; +\infty[$
2. Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{1}{x}$. Définir la restriction f de la fonction h à $]-\infty; 0[$

Correction
1. Écrivons f sans le symbole de la valeur absolue
On pose : $f(x) = 0 \Longrightarrow |6-2x| = 0 \Longrightarrow 6-2x = 0 \Longrightarrow x = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$6-2x$		$+$	0	$-$	
$f(x) = \|6-2x\|$		$f(x) = 6-2x$	0	$f(x) = 2x-6$	

Soit g la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par $g(x) = 2x-6$.
$\forall x \in [3; +\infty[, g(x) = f(x)$ donc g est *une restriction de* f à $[3; +\infty[$
2.

$$\begin{aligned} \text{La fonction } \ g :]-\infty, 0[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

est une restriction de f à $]-\infty, 0[$ et f un prolongement de g à $\mathbb{R}$

2 Application

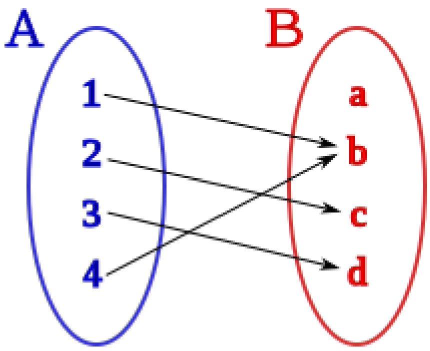
2.1 Définition

Définition (Application)

Une application f d'un ensemble A dans un ensemble B (ou de A vers B) est une correspondance qui à tout élément x de A, associe un et un seul élément y de B

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

2.1.1 Illustration



$A = \{1;2;3;4\}$ et $B = \{a;b;c:d\}$ $\quad$ $f(1) = f(4) = b$, $f(2) = c$ et $f(3) = d$.
L'image de 2 est c et b a deux antécédents que sont 1 et 4

Remarque 2.1

Toute application est une fonction mais la réciproque n'est pas toujours vérifiée.
Une fonction est dite une application si son ensemble de départ est égal à son domaine de définition

2.2 Application injective ou injection

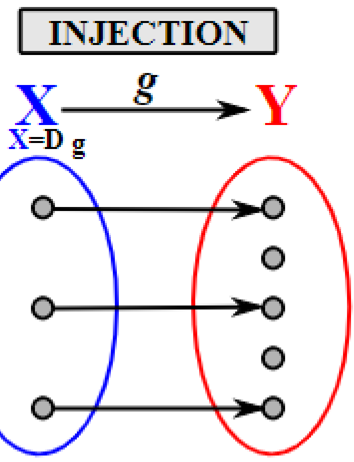
Définition (Application injective ou injection)

On dit que f est une *application injective* ou une *injection* lorsque chaque élément y de F admet *au plus* $(0,1)$ un antécédent x dans E par f

Propriétés

- f est une application injective si et seulement si pour tout élément y de F, l'équation $f(x) = y$ admet zéro ou une seule solution x dans E
- f est une injection si et seulement $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$

2.2.1 Illustration



2.2.2 Exemples

1. Soit f l'application :

$$f :]0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

   Justifier que f est une injection

2. Justifier que l'application g n'est pas injective

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

Correction

1. Soit x et $x' \in]0;+\infty[$, $f(x) = f(x') \Longrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x} \Longrightarrow x = x'$. Donc f est injective
Ou bien : Soit $y \in \mathbb{R}$, $f(x) = y \Longleftrightarrow \sqrt{x} = y$
si $y < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution et si $y \geq 0$ alors on a :
$x = y^2 \in]0;+\infty[$. Donc f est injective.
2. g n'est pas injective car $g(-3) = g(3)$ et $-3 \neq 3$
Ou bien : Soit $y \in \mathbb{R}$, si $y \geq 0$ alors on a :
$g(x) = y \Longleftrightarrow x^2 = y \Longrightarrow x = -\sqrt{y}$ et $x = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ donc g n'est pas une injection.

2.3 Application surjective ou surjection

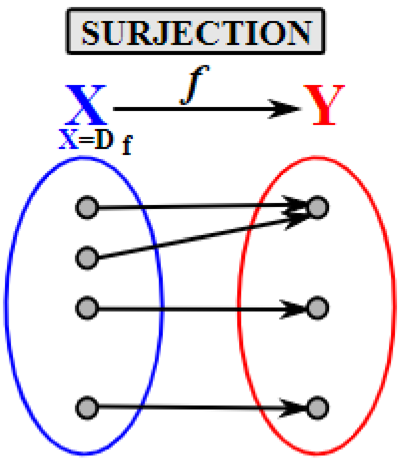
Définition (Application surjective ou surjection)

$f : E \rightarrow F$ est une *application surjective* ou une *surjection* lorsque chaque élément y de F admet *au moins* un (1 ou plus) antécédent x dans E par f

Propriétés

f est une surjection si et seulement si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une ou plusieurs solutions $x \in E$

2.3.1 Illustration



Méthode : Pour démontrer qu'une application f de E vers F est surjective : pour tout élément y de F, on résout l'équation : $f(x) = y$ et on prouve qu'il y toujours au moins une solution dans E (*ne pas oublier de vérifier qu'une solution trouvée est bien dans* E).

2.3.2 Exemple

l'application

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x^2$$

En effet, pour $y \in \mathbb{R}_+$ i. e $y \geq 0$ on a : $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Longrightarrow x = -\sqrt{y}$ et $x = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$

Exercice 2.1 (Exercice d'application)

Soit l'application f : définie de $[0;3]$ vers $[1;10]$ par $f(x) = x^2 + 1$
Démontrer que f est une surjection.

Correction

Soit $y \in [1;10]$, résolvons l'équation $f(x) = y$.
Comme $y \in [1;10]$ donc : $x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$ ou $x = -\sqrt{y-1}$.
Puisque $y \in [1;10] \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq y - 1 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y-1} \leq 3$. Donc $\sqrt{y-1} \in [0;3]$.

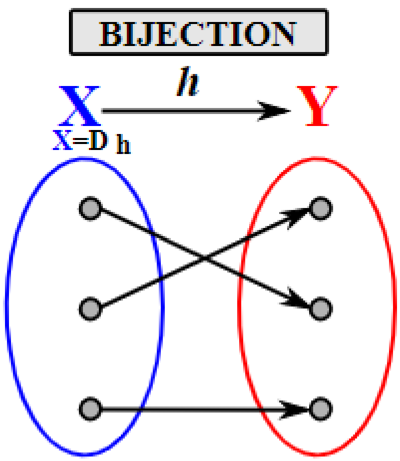
2.4 Application bijective ou bijection

Définition (Application bijective ou bijection)

$f : E \to F$ est une *application bijective* ou une *bijection* lorsque chaque élément y de F admet *un et un seul antécédent* (unique) x dans E par f.

Propriété :
On dit que f est une bijection (ou f est bijective) si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

2.4.1 Illustration



Méthode : Pour montrer qu'une application f de E vers F est bijective : soit on démontre successivement qu'elle est injective puis surjective, soit on résout, pour tout élément y de F, l'équation : $f(x) = y$ et on prouve que cette équation admet une unique solution x dans E.

2.4.2 Exemple

Démontrer que l'application f suivante est une bijection

$$\begin{aligned} f : [2;+\infty[&\to]-\infty;-5] \\ x &\longmapsto 1-3x \end{aligned}$$

Pour tout $y \in]-\infty;-5]$, $f(x) = y \Leftrightarrow 1-3x = y \Longrightarrow x = \dfrac{1-y}{3}$

Comme $y \in]-\infty;-5] \Leftrightarrow y \leq -5 \Rightarrow -y \geq 5 \Rightarrow 1-y \geq 6 \Rightarrow \dfrac{1-y}{3} \geq 2$.

Donc $x \in [2;+\infty[$, par conséquent, f est une bijection.

2.5 Bijection réciproque

Définition

Soit f une bijection de E sur F. Ainsi tout élément y de F admet un antécédent unique x dans E. La bijection réciproque de f notée f^{-1}, est l'application qui à chaque y de F fait correspondre son unique antécédent x dans E.

2.5.1 Propriétés

Soit f une bijection de E sur F et f^{-1} sa bijection réciproque. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives respectives de f et celle de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

2.5.2 Exemples

Exemple 1

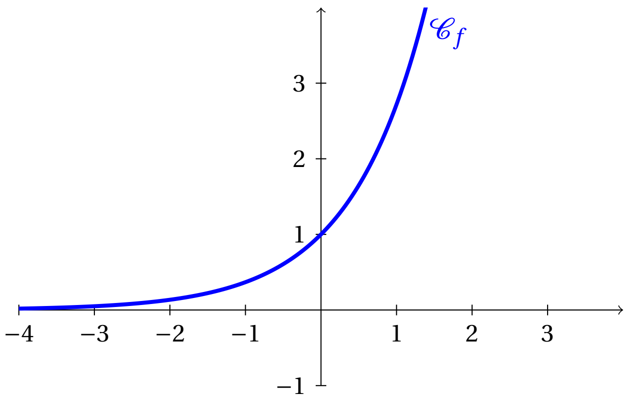
Soit l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : [0;+\infty[&\to [-1;+\infty[\\ x &\mapsto x^2-1 \end{aligned}$$

Démontrer que f est une bijection puis déterminer la bijection réciproque de f^{-1} de f. Préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de la bijection réciproque

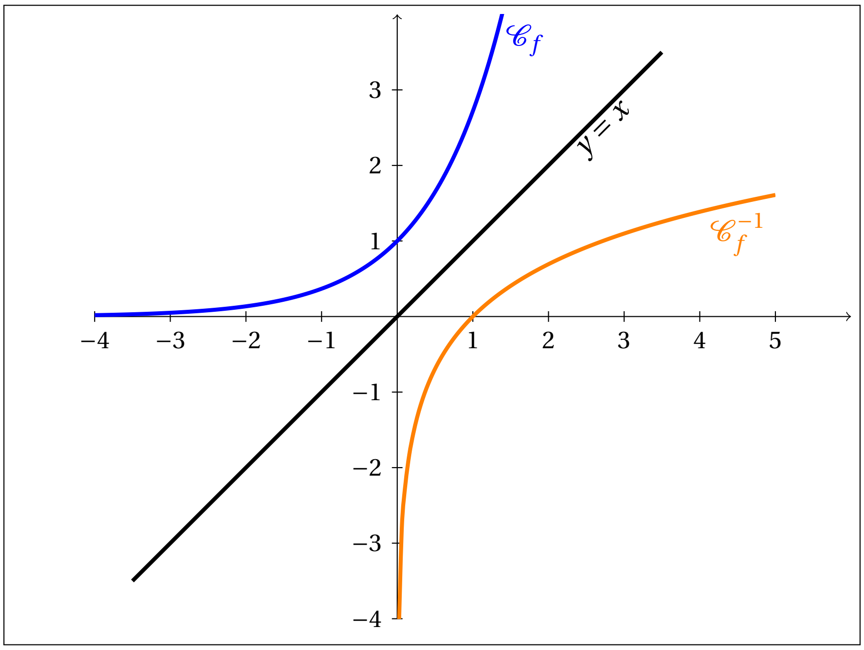
Exemple 2

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une bijection f. Construire la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la bijection réciproque f^{-1} de f.



Correction Exemple 1
Soit y un nombre réel quelconque appartenant à $[-1;+\infty[$,
$f(x)=y \Longleftrightarrow x^2-1=y \Longleftrightarrow x^2=1+y$, comme $y\in[-1;+\infty[$ alors $y+1\geq 0$.
Donc $x^2=1+y \Longleftrightarrow x=-\sqrt{1+y}$ ou $x=\sqrt{1+y}$. On a deux valeurs de x par contre l'une seule appartient à l'ensemble de départ.
C'est à dire $x=\sqrt{1+y}\in[-1;+\infty[$.
Donc pour tout $y\in[-1;+\infty[$, l'équation $f(x)=y$ admet dans $[0;+\infty[$ une unique solution.
Nous venons de prouver que chaque élément de l'ensemble d'arrivée $[-1;+\infty[$ admet un antécédent unique dans l'ensemble de départ $[0;+\infty[$.
Par conséquent f est une bijection. *La bijection réciproque* est $f^{-1}:[0;+\infty[\to[-1;+\infty[$

Correction Exemple 2
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $y=x$.



3 Fonctions bornées

3.1 Fonctions minorées

Définition (Fonctions minorées)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que, pour tout x de I, $f(x) \geq m$.
On dit que m est un minorant de f sur I

Remarque 3.1 (Minorant)

Tout réel k inférieur ou égal à m est aussi un minorant de f sur I.
Une fonction est minorée par son minimum (s'il existe)

3.1.1 Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ donc f *est minorée par* 0

3.2 Fonctions majorées

Définition (Fonctions majorées)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout x de I, $f(x) \leq M$.
On dit que M est un majorant de f sur I.

Remarque 3.2 (Majorant)

Tout réel K supérieur ou égal à M est aussi un majorant de f sur I.
Une fonction est majorée par son maximum (s'il existe)

3.2.1 Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$. Démontrer que f est majorée par 3

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$ donc $\quad x^2+1 \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ d'où $\dfrac{3}{x^2+1} \leqslant 3$ c'est à dire $f(x) \leqslant 3$ par conséquent f *est majorée par 3*

3.3 Fonctions bornées

Définition (Fonctions Bornées)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est bornée sur I si elle est à la fois minorée et majorée sur I.

Remarque 3.3 (Fonctions bornées)

Si f est bornée sur I, alors il existe deux réels m et M tels que, pour tout x de I, $m \leq f(x) \leq M$.

3.3.1 Exemples

Les fonctions cosinus et sinus définies sur $\mathbb{R}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ par -1 et 1. On a donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

La fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ est minorée sur $\mathbb{R}$ par 0 mais n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ est majorée sur $]-\infty;0[$ par 0 mais n'est pas minorée sur $]-\infty;0[$

La fonction $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ donnée dans les exemples précédents est *minorée par* 0 et *majorée par* 3 donc elle est bornée et on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$

3.3.2 Exercice d'application

Exercice 3.1 (Application : Fonction bornée)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $g(x) = -4 - \dfrac{1}{x-2}$.
Démontrer que g est bornée sur $[-3;1]$.

3.4 Composée de fonctions

Définition (Composée de fonction)

Soit E, F et G trois ensembles. Soit f une fonction de E vers F et g une fonction de F vers G. La composée $g \circ f$ ("g rond f ") est la fonction de E vers G définie par : $g \circ f(x) = g(f(x))$.

3.4.1 Domaine de définition

Pour que la notation $g \circ f(x)$ ait un sens, il faut et il suffit que x soit dans $\mathscr{D}_f$ et que $f(x)$ soit dans $\mathscr{D}_g$.

Mathématiquement, on note : $x \in \mathscr{D}_{g\circ f} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ f(x) \in \mathscr{D}_g \end{cases}$

3.4.2 Exemples

Soit $(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_{g\circ f}$ et $\mathscr{D}_{f\circ g}$
2. Calculer $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$ puis conclure

Correction

1. Déterminons $\mathscr{D}_{g\circ f}$ et $\mathscr{D}_{f\circ g}$
   $f(x)$ existe si et seulement si $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$. Donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}-\{1\}$
   $g(x)$ existe si et seulement si $x-2\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant 2$. Donc $\mathscr{D}_g=[2;+\infty[$

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{g\circ f} &= \left\{x\in\mathscr{D}_f / f(x)\in\mathscr{D}_g\right\}\\
&\Leftrightarrow x\neq 1 \text{ et } f(x)\geqslant 2\\
&\Leftrightarrow x\neq 1 \quad \frac{x^2+1}{x-1}\geqslant 2\\
&\Leftrightarrow x\neq 1 \quad \frac{x^2-2x+3}{x-1}\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow x\neq 1 \quad x\in[1;+\infty[
\end{aligned}$$

   D'où $\mathscr{D}_{g\circ f}=]1;+\infty[$
   En raisonnant de manière analogue, on trouve que : $\mathscr{D}_{f\circ g}=]2;3[\cup]3;+\infty[$

2. Calculons $f\circ g(x)$ et $g\circ f(x)$
   $f\circ g(x)=f\left[g(x)\right]=\dfrac{(g(x))^2+3}{g(x)-1}=\dfrac{(\sqrt{x-2})^2+3}{\sqrt{x-2}-1}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}-1}$
   $g\circ f(x)=g\left[f(x)\right]=\sqrt{f(x)-2}=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}-2}=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}}$
   Conclusion : On remarque que : $g\circ f(x)\neq f\circ g(x)$

4 Parité et éléments de symétrie

4.1 Parité d'une fonction

4.1.1 Fonction paire

Définition (Fonction paire)

Soit f une fonction définie sur intervalle I. On dit que f est paire si :

I) I est centré en zéro

II) Pour tout x de I, $f(-x)=f(x)$

4.1.2 Propriétés

Dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'*axe des ordonnées.*

4.1.3 Exemple

Soit $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, démontrons que f est une fonction paire.
$f(x)\,\exists$ si $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1;1]$ et $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$ donc f est paire.

4.1.4 Fonction impaire

Définition (Fonction impaire)

Soit f une fonction définie sur intervalle I. On dit que f est paire si :

I) I est centré en zéro

II) Pour tout x de I, $f(-x) = -f(x)$

4.1.5 Propriétés

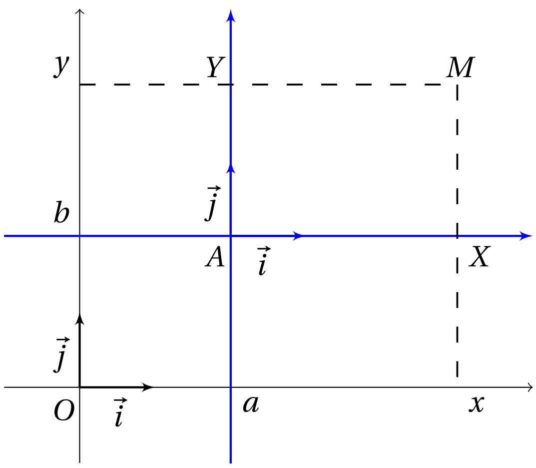
Dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'*origine du repère.*

4.1.6 Exemple

4.2 Éléments de symétrie

4.2.1 Formules de changement de repère par translation

Dans un $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ soient les points A de coordonnées $(a; b)$ et M de coordonnées $(x; y)$.
Dans le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, si on note $(X; Y)$ les coordonnées de M, alors : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$
Ces formules sont appelées formules de changement de repère par translation.
Démonstration
Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ A et M ont pour coordonnées respectives $(a; b)$ et $(x; y)$, il vient donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$
Dans le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ M a pour coordonnées $(X; Y)$, il vient donc $\overrightarrow{AM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$.
D'après la relation de Chasles, on a :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = (a\vec{i} + b\vec{j}) + (X\vec{i} + Y\vec{j}) = (a+X)\vec{i} + (b+Y)\vec{j}$. Il vient donc : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$



Remarque 4.1

On qualifie le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'ancien repère et le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de nouveau repère.

4.2.2 Axe de symétrie

4.2.3 Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. La droite $\Delta(x = a)$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, pour tout x de I :
(i) $(2a - x) \in I$.
(ii) $f(2a - x) = f(x)$.

En posant $x = a + h$, il vient alors $2a - x = a - h$.
On peut ainsi aurons la propriété suivante :

4.2.4 Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. La droite $\Delta(x = a)$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, pour tout réel h tel que $(a + h) \in I$:
(i) $(a - h) \in I$.
(ii) $f(a + h) = f(a - h)$.

4.2.5 Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soient Δ la droite d'équation $x = a$ et A un point de Δ (par exemple le point de coordonnées $(a;0)$). Dans le repère orthogonal $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une certaine fonction g et a donc pour équation $Y = g(X)$. La droite $\Delta(x = a)$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, g est paire.

Remarque 4.2

Dire que, pour tout h de I, si $(a + h) \in I$, alors $(a - h) \in I$ revient à dire que I est centré en a.

4.2.6 Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$. Montrons que la droite Δ d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$

Méthode 1 : *Effectuons un changement de repère.*
Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $A(2;0) \in (\Delta)$ et $M(x; y)$.

On note $(X;Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Les formules de changement de repère sont : $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y \end{cases}$

Établissons ensuite l'équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}_f &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow Y = f(X+2) \\ &\Leftrightarrow Y = -(X+2)^2 + 4(X+2) + 5 \\ &\Leftrightarrow Y = -X^2 + 9 \end{aligned}$$

Dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'équation de $\mathscr{C}_f$ est $Y = g(X)$ où $g : X \mapsto -X^2 + 9$.
Montrons enfin que g est paire.

g est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_g$ est centré en 0.
Pour tout X de $\mathbb{R}$, $g(-X) = -(-X)^2 + 9 = -X^2 + 9 = g(X)$. g est donc paire.
D'où la droite Δ d'équation $x = 2$ est donc axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Méthode 2 :
Vérifions que $(4-x) \in \mathscr{D}_f$.
f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $(4-x) \in \mathbb{R}$.
Vérifions ensuite que $f(4-x) = f(x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$f(4-x) = -(4-x)^2 + 4(4-x) + 5 = -(16 - 8x + x^2) + 16 - 4x + 5 = -x^2 + 4x + 5 = f(x)$.
D'où la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est donc axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Méthode 3 :
Vérifier que $\mathscr{D}_f$ est centré en 2.
f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $(2+h) \in \mathbb{R}$, $(2-h) \in \mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_f$ est centré en 2.
Vérifions ensuite que $f(2-h) = f(2+h)$.
D'une part, pour tout h de $\mathbb{R}$, on a :
$f(2-h) = -(2-h)^2 + 4(2-h) + 5 = -(4 - 4h + h^2) - 4h + 13 = -h^2 + 9$.
D'autre part, pour tout h de $\mathbb{R}$, ona :
$f(2+h) = -(2+h)^2 + 4(2+h) + 5 = -(4 + 4h + h^2) + 4h + 13 = -h^2 + 9$.
D'où la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est donc axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

4.2.7 Centre de symétrie

4.2.8 Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal$\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Le point $A(a;b)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, pour tout x de I :
(i) $(2a - x) \in I$.
(ii) $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

En posant $x = a + h$, il vient alors $2a - x = a - h$.
On peut ainsi aurons la propriété suivante :

4.2.9 Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Le point $A(a;b)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, pour tout réel h tel que $(a+h) \in I$:
(i) $(a-h) \in I$.
(ii) $f(a+h)+f(a-h)=2b$.

4.2.10 Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Dans le repère orthogonal $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une certaine fonction g et a donc pour équation $Y = g(X)$. Le point $A(a;b)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, g est impaire.

4.2.11 Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-3$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$.
Montrons que le point $A(3;2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
Méthode 1 :
Dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soient $A(3;2) \in (\Delta)$ et $M(x;y)$.
On note $(X;Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Les formules de changement de repère sont : $\begin{cases} x = X+3 \\ y = Y+2 \end{cases}$

Établissons ensuite l'équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}_f &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow Y+2 = f(X+3) \\ &\Leftrightarrow Y = \frac{2(X+3)-1}{X+3-3} - 2 \\ &\Leftrightarrow Y = \frac{2X+5}{X} - 2 \quad \Leftrightarrow Y = \frac{5}{X} \end{aligned}$$

Dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'équation de $\mathscr{C}_f$ est $Y = g(X)$ où $g : X \mapsto \dfrac{5}{X}$.
Montrons enfin que g est impaire.
g est définie sur $\mathbb{R}-0$ donc $\mathscr{D}_g$ est centré en 0.
Pour tout X de $\mathbb{R}$, $g(-X) = \dfrac{5}{-X} = -\dfrac{5}{X} = -g(X)$. g est donc impaire.
D'où le point $A(3;2)$ est donc un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
Méthode 2 :
Vérifions que $(6-x) \in \mathscr{D}_f$.
f est définie sur $\mathbb{R}-3$. Si $x \in \mathscr{D}_f$, alors $x \neq 3$, d'où $(6-x) \neq 3$, soit $(6-x) \in \mathscr{D}_f$.
Vérifions ensuite que $f(6-x)+f(x) = 4$.
Pour tout x de $\mathbb{R}-3$, $f(6-x)+f(x) = \dfrac{2(6-x)-1}{(6-x)-3} + \dfrac{2x-1}{x-3} = \dfrac{11-2x}{3-x} + \dfrac{2x-1}{x-3} = \dfrac{12-4x}{3-x} = 4$.
D'où le point $A(3;2)$ est donc centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

5 Fonctions associées

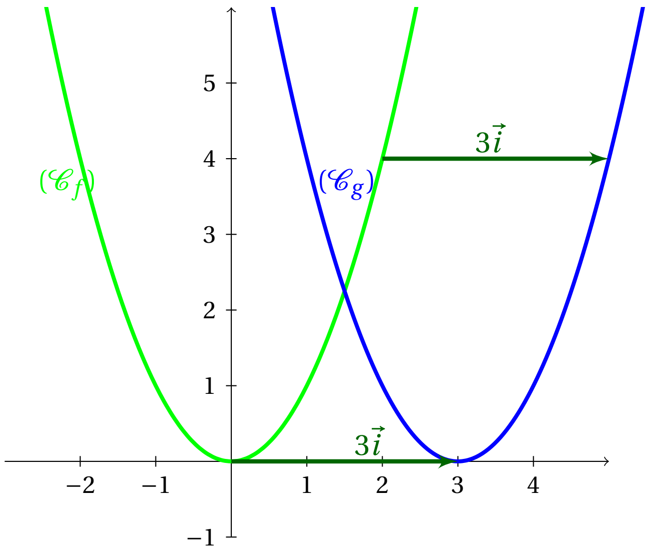
Le plan est muni du repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction numérique et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative, a et b deux nombres réels. L'utilisation des fonctions associées permet de construire la courbe d'une fonction g à partir de celle de f (fonction référence).

5.1 Propriété

f est une fonction numérique et g la fonction associée à f. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont les courbes représentatives respectives de f et g.

5.2 fonction du type : $x \mapsto f(x-a)$

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D}$, a un réel fixe et g la fonction telle que $g(x) = f(x-a)$. SI $(x-a) \in \mathscr{D}$ alors $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $a\vec{i}$



5.2.1 Exemple

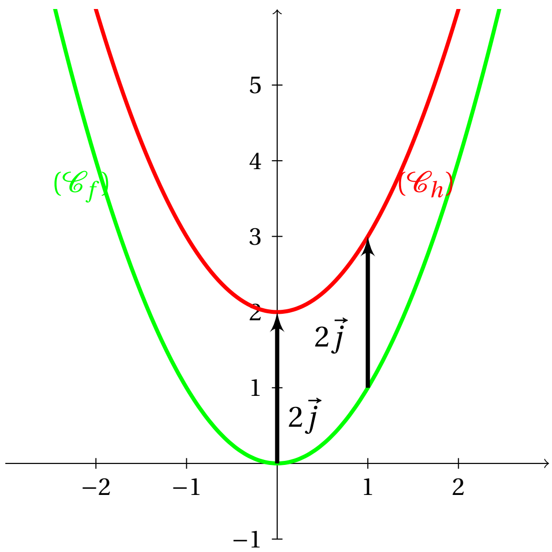
$f(x) = x^2$ et $g(x) = (x-3)^2$.
On remarque que $g(x) = f(x-3)$ donc $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $3\vec{i}$.

Tableau des valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

5.3 fonction du type : $x \mapsto f(x) + b$

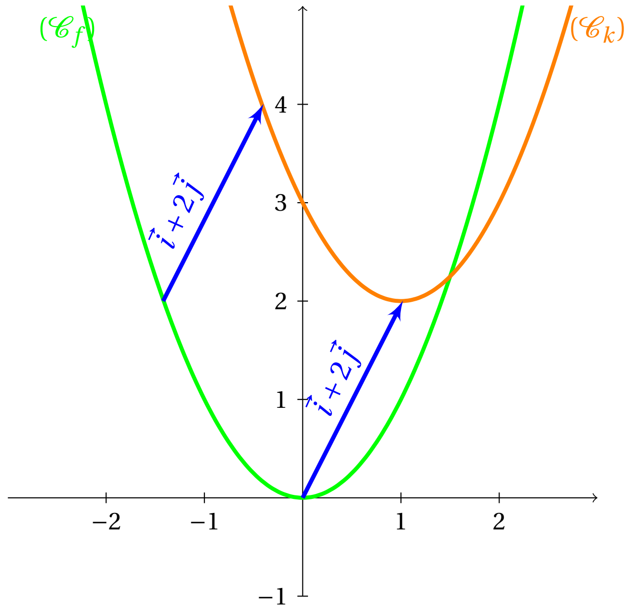
$h(x) = f(x) + b$ alors $(\mathscr{C}_h)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $b\vec{i}$



5.3.1 Exemple

$h(x) = x^2 + 2$, on remarque que $h(x) = f(x) + 2$ alors $(\mathscr{C}_h)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$

5.4 fonction du type : $x \mapsto f(x-a)+b$

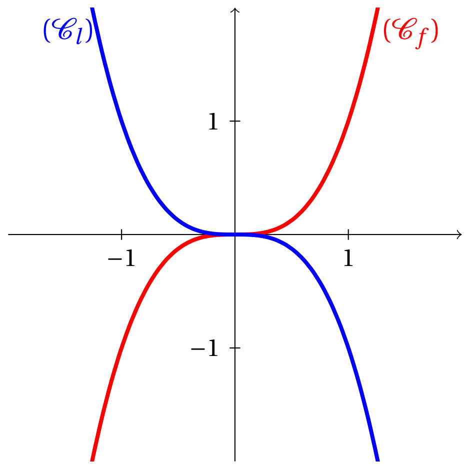


$k(x) = f(x-a)+b$ alors $(\mathscr{C}_k)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $u = a\vec{i}+b\vec{j}$

5.4.1 Exemple

$k(x) = (x-1)^2$ donc $k(x) = f(x-1)+2$ par conséquent, $(\mathscr{C}_k)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $u = \vec{i}+2\vec{j}$

5.5 fonction du type : $x \mapsto -f(x)$

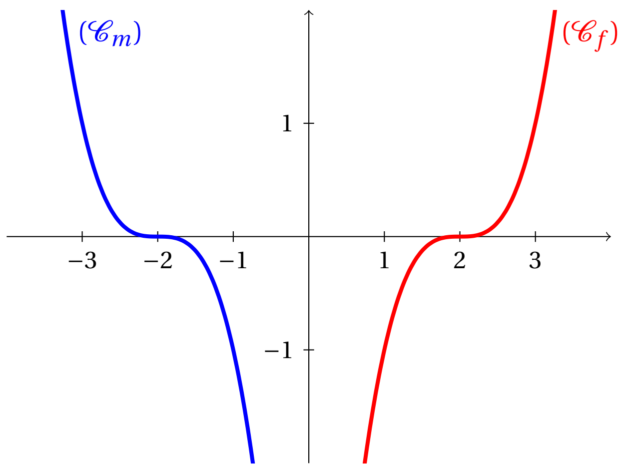


$l(x) = -f(x)$ alors $(\mathscr{C}_l)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie d'axe (Ox) (l'axe des abscisses)

5.5.1 Exemple

Soit $f(x) = x^3$ et $l(x) = -f(x)$ c'est à dire $l(x) = -x^3$

5.6 fonction du type : $x \mapsto f(-x)$



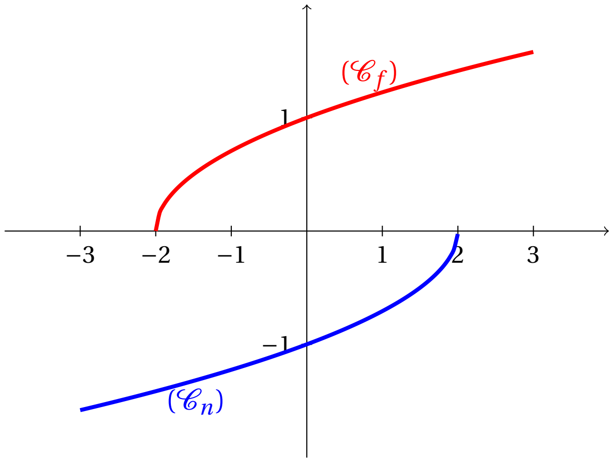
$m(x) = f(-x)$ alors $(\mathscr{C}_m)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie d'axe (Oy) (l'axe des ordonnées)

5.6.1 Exemple

Soit $f(x) = (x-2)^3$ et $m(x) = f(-x)$ c'est à dire $m(x) = (-x-2)^3$

5.7 fonction du type : $x \longmapsto -f(-x)$

$n(x) = -f(x)$ alors $(\mathscr{C}_n)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie de centre O



5.7.1 Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+1}$ et $n(x) = -f(-x)$ c'est à dire $n(x) = -\sqrt{-\frac{1}{2}x+1}$

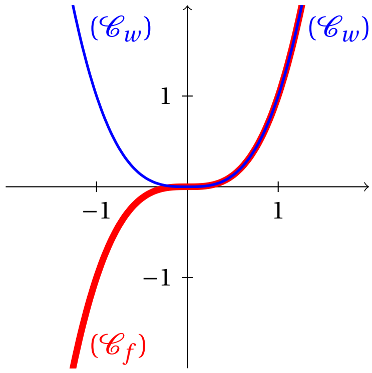
5.8 fonction du type : $x \longmapsto |f(x)|$

Soit $w(x) = |f(x)|$

On a : $\begin{cases} w(x) = f(x) \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ w(x) = -f(x) \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$

Si $w(x) = -f(x)$ alors la courbe de w se déduit de celle de f par rapport à l'axe des abscisses

Si $w(x) = f(x)$ alors la courbe de w est la réunion de $(\mathscr{C}_f)$ avec $(f(x) \geqslant 0)$ et la symétrie par rapport à l'axe des abscisses



5.9 fonction du type : $x \longmapsto f(|x|)$

Soit $v(x) = f(|x|)$

On a : $\begin{cases} v(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ v(x) = f(-x) \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

La courbe représentative $(\mathscr{C}_v)$ est la représentative de $(\mathscr{C}_f)$ pour ses abscisses positives et de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de la partie positive de $(\mathscr{C}_f)$