SOMMAIRE CLASSE DE 1^{re}L

ALGEBRES

ANALYSES

Conforme au nouveau programme des mathématiques du second cycle.

$2^{éme}$ EDITION 2014-2015.

m.s.ka

« Les mathématiques sont la poésie des sciences »
(Léopold sèdar Senghor).

SERIE N°1 : SYSTEME D'EQUATIONS ET D'INEQUTION

Exercice 1: Méthode d'addition

Résoudre dans IR^2 en utilisant la méthode d'addition.

a) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ -3x+2y+5=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+10y=58 \\ 10x+3y=72 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$

Exercice 2: Méthode de substitution

Résoudre dans IR^2 en utilisant la méthode de substitution.

a) $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ -3x+5y-1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 3x+4y-5=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3y-1=0 \\ 2x-y+7=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x+y-1=0 \\ 2x-\frac{1}{4}y+7=0 \end{cases}$

Exercice 3: Méthode de comparaison

Résoudre dans IR^2 en utilisant la méthode de comparaison.

a) $\begin{cases} x+3y-1=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+5y-1=0 \\ 2x-3y+5=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x+2y-7=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases}$

Exercice 4: Méthode de Cramer

Résoudre dans IR^2 en utilisant la méthode de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 3x+4y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x-9y=0 \\ 3x+y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y-1=0 \\ 2x+\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=1 \\ -x+\frac{2}{3}y=\frac{2}{3} \end{cases}$

Exercice 5: Méthode de Pivot de Gauss

Résoudre dans IR^3 chacun des systèmes en utilisant la méthode du Pivot de Gauss (**avec la combinaison**)

a) $\begin{cases} x+2y-z-8=0 \\ -x+3y+4z+7=0 \\ 2x-y+2z+6=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3x+2y+z=10 \\ 2x-3y-2z=-10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-2y-7z=20 \\ 3x-y+3z=10 \\ 2x-3y-z=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+z=8 \\ y+z=10 \\ x+y=5 \end{cases}$

Exercice 5: Méthode de Pivot de Gauss

Résoudre dans IR^3 chacun des systèmes en utilisant la méthode du Pivot de Gauss (**avec la comparaison**)

e) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 4x+3z=-1 \\ 3x-6y-5z=4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+6z=3 \\ 2x-9y+12z=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 4x+5y-20z=-2 \\ -3x+5y+5z=4 \end{cases}$

Exercice 5: Méthode de Pivot de Gauss

Résoudre dans IR^3 chacun des systèmes en utilisant la méthode du Pivot de Gauss (**avec substitution**)

h) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 5x-2y-10z=0 \\ 3x+5y-2z=6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5x+2y-3z=1 \\ 8x-4y+3z=-5 \\ 2x-5y+4z=-6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+3y+z=15 \\ 2x+2y-5z=-10 \\ -3x+y+2z=5 \end{cases}$

Exercice 6: Inéquation du premier degré à deux inconnues

Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y-1\geq 0 \\ 2x-y+4<0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-1\geq 0 \\ -2x+y+2<0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-1\geq 0 \\ 2x+2y+2\leq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-2y-1<0 \\ x+2y+3\geq 0 \\ x+y>0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x-2y+5\geq 0 \\ 2x+y-2\leq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$

Exercice 8: Problème d'optimisation

Lors de son anniversaire, Karine veut faire un cocktail de jus de fruits.
Elle achète x litres de jus de goyave à 600F le litre et y litres de jus d'ananas à 400F le litre.
Karine veut avoir au moins 10 litres de ce cocktail de jus de fruit, mais elle ne dispose pour cela que 6000F.
Résoudre graphiquement ce problème. (On cherchera les valeurs possibles de x et y)

SERIE N°2 : PÔLYNOMES

Exercice 1: Identification d'un polynôme

Parmi les fonctions numériques suivantes, reconnaître celles qui sont des polynômes et préciser le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

1. $f(x) = 10x^2 - 5x + 2x^7$; $g(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 7}$; $h(x) = \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 7x}{\sqrt{2}}$; $p(x) = 3x^5 + |x| - 7$

2. $f(x) = (x\sqrt{3} - 2)(x^2 + \pi)$; $g(x) = (x^3 - 2x^2)(x^5 - 3x) - x^8$; $h(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x^2 + 9}$; $p(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{7}{x} + x^2$

Exercice 2: Forme canonique

Mettez chacun des polynômes P(x) sous la forme canonique :

a) $P(x) = x^2 - 4x + 9$. b) $P(x) = x^2 - x + 6$. c) $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

d) $P(x) = 2x^2 - x - 1$. e) $P(x) = x^2 + 9$. f) $P(x) = x^2 - 16$. g) $P(x) = -x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{9}$.

Exercice 3: Equation du second degré

1. Résoudre dans IR chacune des équations et inéquations suivantes :

a) $x^2 + 2x - 1 = 0$; b) $-x^2 + x - 1 = 0$; c) $-5x^2 + x + 1 = 0$

d) $3x^2 + 5x - 1 = 0$; e) $169x^2 + 13x - 1 = 0$; c) $\dfrac{1}{2}x^2 + 5x - 1 = 0$

2. Résoudre dans IR chacun des systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -12 \end{cases}$

Exercice 4: Equation du second degré

1. Etudie le signe de chacune des trinômes

a) $x^2 + 2x - 1$; b) $-4x^2 + 5x - 2$; c) $3x^2 - 12x - 9 = 0$

d) $-36x^2 + 64$; e) $x^2 - 6x + 8 = 0$; f) $x^2 - x = 0$

2. Résoudre dans IR chacun des inéquations suivantes :

a) $x^2 + x - 2 < 0$; b) $3x^2 - 6x + 3 \geq 0$. c) $2x^2 - x + 9 > 0$

d) $2x^2 - x + 1 \geq 0$. **e**) $x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 < 0$; f) $x^2 - 2x + 5 \leq 0$.

3. Factoriser si possible les polynômes du second degré :

a) $f(x) = x^2 + 6x - 7$ b) $f(x) = 2x^2 - x + 1$. c) $f(x) = x^2 + 11x - 26$.

Exercice 5: Factorisation d'un polynôme : Méthode de la division Euclidienne.

On considère le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. Montre que -2 est une racine de p (x).
2. Factorisation p (x) par la méthode de la division euclidienne.

Exercice 6: Factorisation d'un polynôme : Méthode de la division Euclidienne.

On considère le polynôme h définie par : $h(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 2$.

1. Calculer h(1). Conclure.
2. Factorisation p (x) par la méthode de la division euclidienne.

Exercice 7: Factorisation d'un polynôme : Méthode de la division Euclidienne.

On considère le polynôme h définie par : $k(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

1. Trouve une racine évidente $k(x)$.
2. Factorisation $k(x)$ par la méthode de la division euclidienne.

Exercice 8: Factorisation d'un polynôme : Méthode d'identification de coefficient.

On considère le polynôme h définie par : $A(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$.

1. Montre que 4 est une racine de $A(x)$.
2. Factorisation A par la méthode d'identification des coefficients.

Exercice 9: Factorisation d'un polynôme : Méthode d'identification de coefficient.

On considère le polynôme h définie par : $B(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$.

1. Calcule B(1) et B (-2).
2. Factorisation B par la méthode d'identification des coefficients.

Exercice 10: Factorisation d'un polynôme : Méthode d'identification de coefficient.

Soit C le polynôme défini par : $C(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Trouve une racine évidente de $C(x)$.
2. Factorise $C(x)$ par la méthode d'identification des coefficients.

Exercice 11: Factorisation d'un polynôme : Méthode de Höner.

On considère le polynôme h définie par : $A(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$.

1. Montre que 4 est une racine de $A(x)$.
2. Factorisation A par la méthode de Höner.

Exercice 12: Factorisation d'un polynôme : Méthode d'identification de Höner.

On considère le polynôme h définie par : $B(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$.

1. Calcule B(1) et B (-2).
2. Factorisation B par la méthode d'identification de Honer.

Exercice 13: Factorisation d'un polynôme : Méthode d'identification de Höner.

Soit C le polynôme défini par : $C(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Trouve une racine évidente de $C(x)$.
2. Factorise $C(x)$ par la méthode d'identification de Höner.

Exercice 14: Résolution d'équation et d'inéquation.

1. Développe, réduis et ordonne $p(x) = (x - 3)(x + 2)(x + 1)$.
2. Résoudre dans IR $p(x) = 0$.
3. Résoudre dans IR $p(x) \leq 0$.
4. Déduire les solution de l'équation : $(\sqrt{x} - 3)^3 - 7(\sqrt{x} - 3) - 6 = 0$.

Exercice 15:

On considère le polynôme f définie par : $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$;

1. Calculer $f(1)$ et $f(-2)$.
2. En déduire une factorisation de $f(x)$.
3. Résoudre dans IR l'équation : $f(x) = 0$.
4. Résoudre dans IR l'inéquation : $f(x) \geq 0$.

Exercice 16: Résolution d'équation et d'inéquation.

Soit le polynôme $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ où a et b sont des nombres réels ;

1. Déterminer a et b sachant que $p(-2) = 0$ et $p(-1) = 8$.
2. On pose $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
   a) Factoriser $p(x)$.
   b) Résoudre dans IR l'équation : $p(x) = 0$. **c)** Résoudre dans IR l'inéquation : $p(x) \leq 0$.

Exercice 17: Résolution d'équation et d'inéquation.

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + a$.

1. Détermine le réel a tel que $P(x)$ soit divisible par $2x - 1$.
2. Mettre $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs binômes.
3. Résoudre dans IR $P(x) = 0$ et $P(x) \leq 0$.
4. En déduire la résolution de l'équation $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

SERIE N°3 : FONCTION NUMERIQUE : Notion de fonction

Exercice 1: Domaine de définition

Précise le domaine de définition de chacune des fonctions

a) $f(x) = x^3 - 4x + 4$. b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4}$; c) $f(x) = \sqrt{4-8x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^2+3}$

Exercice 2: Domaine de définition

Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$. b) $f(x) = \dfrac{x-7}{2x}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

Exercice 3: Domaine de définition

Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 2}$; ***b)*** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; **c)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}}$; **d)** $f(x) = \dfrac{7}{2x-4} + \dfrac{2}{x}$; **e)** $f(x) = \left|\dfrac{2x-1}{4-8x}\right|$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x-5}$; **g)** $f(x) = \dfrac{5x-10}{\sqrt{-x+4}}$; **h)** $f(x) = 3x - 1 + \dfrac{x}{x-2}$; **i)** $f(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{5}{x-3}$.

Exercice 4: Fonction polynôme : Image et antécédent

On donne la fonction polynôme f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1. Calculer l'image par f de chacun des nombres : -2 ; 1 et $\dfrac{1}{2}$.

2. Calculer les antécédents des nombres par f de chacun des nombres : 0 ; -1 et 2.

Exercice 5: Fonction rationnelle : Image et antécédent

On donne la fonction polynôme g définie par : $g(x) = \dfrac{3x-4}{x+1}$.

1. Calculer l'image par g de chacun des nombres : -3 et 2.

2. Calculer les antécédents des nombres par g de chacun des nombres : -1 et $\dfrac{1}{2}$.

RAPPEL DU COURS PORTANT SUR LA PARITE D'UNE FONCTION

1. *Pour montrer qu'une fonction f* ***est paire****:*

a. *On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ dans l'expression de $f(x)$.*

b. *On montre que $f(-x) = f(x)$*

2. *Pour montrer qu'une fonction f* ***est impaire*** *:*

a. *On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ dans l'expression de $f(x)$.*

b.*On calcule $-f(x)$* ***c.****On montre que $f(-x) = -f(x)$*

Exercice 6: Parité d'une fonction

Etudier la parité de chacune des fonctions ci-dessous après avoir donné leur domaine de définition.

1) $f(x) = x^3 - 4x + 4$; **2)** $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x}$; **3)** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2}$; **4)** $f(x) = x(x^2 - 1)$

Exercice 7: Parité d'une fonction

Etudier la parité de chacune des fonctions ci-dessous après avoir donné leur domaine de définition.

1) $f(x) = |x| - 9$; **2)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - 4}{x}$; **3)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 + 2x$. **5)** $f(x) = \dfrac{x^4 - 2}{x^2+9}$; **6)** $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x}$

RAPPEL DU COURS PORTANT SUR L'AXE DE SYMETRIE D'UNE FONCTION

La droite (d) (x = a) est axe de symétrie de la courbe C_f *si et seulement si , pour tout x de* D_f *:* *i)* $(2a - x) \in D_f$

ii) $f(2a - x) = f(x)$.

Exercice 8: Axe de symétrie d'une fonction

Dans chacun des cas, démontre que la droite (d) est un axe de symétrique.

a) $f(x) = x^2 - 4x - 1$ $(d) : x = 2.$ b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ $(d) : x = -1$

c) $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$ $(d) : x = \frac{2}{3}.$ d) $f(x) = \left|\frac{2}{x+2}\right|$ $(d) : x = -1$

RAPPEL DU COURS PORTANT SUR CENTRE DE SYMETRIE D'UNE FONCTION

Le point A (a ; b) est centre de symétrique de C_f *si et seulement si, pour tout x de* D_f *:*

i) $(2a - x) \in C_f$

ii) $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exercice 9: Centre de symétrie d'une fonction

Dans chacun des cas, démontre que le point A est un centre de symétrique.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ $A(0;2)$; b) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ $A(-1;2)$

c) $f(x) = \frac{x^2-4}{2(x-1)}$ $A(1;1)$; d) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1}$ $A(1;-2)$

Exercice 10: Approfondissement

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+2}$

1. Détermine le domaine de définition de *f*.
2. Etudie la parité de *f*.
3. Montre que $\Omega(-2;1)$ est centre de symétrique à C_f.

Exercice 11: Approfondissement

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{-x}$

1. Détermine le domaine de définition de *f*.
2. Etudie la parité de *f*.
3. Montre que $\Omega(0;2)$ est centre de symétrique à C_f.

Exercice 12: Approfondissement

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4x - 1$

1. Détermine le domaine de définition de *f*.
2. Etudie la parité de *f*.
3. Montre que (d) : x = 2 est un axe de symétrique à C_f.

Exercice 13: Approfondissement

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1. Détermine le domaine de définition de *f*.
2. Etudie la parité de *f*.
3. Montre que (d) : x = - 1 est un axe de symétrique à C_f.

SERIE N°4 : LIMITE ET CONTINUITE.

Exercice 1: Limite en x_0 d'une fonction définie en x_0.

Calcule la limite en x_0 de chacune des fonctions

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$. $x_0 = -3$. *2)* $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x + 1$. $x_0 = 0$.

3) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{-x+3}$ $x_0 = 2$. **4)** $f(x) = \dfrac{5x^2-3}{x^2+4}$ $x_0 = -2$.

5) $g(x) = \sqrt{x-5}$ $x_0 = 5$. **6)** $f(x) = \sqrt{5x+4}$ $x_0 = -\dfrac{4}{5}$.

Exercice 2: Limite à l'infini d'une fonction définie à l'infini.

a) Calcule

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x}$ **2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{2}$ **3)** $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x}$ **4)** $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x^3$

b) Calcule la limite en x_0 de chacune des fonctions

1) $f(x) = x^2 - 6$ $x_0 = -\infty$; **2)** $f(x) = -3x^2$ $x_0 = -\infty$; **3)** $f(x) = \dfrac{5}{2x+4}$ $x_0 = +\infty$.

Exercice 3: Limite en x_0 d'une fonction non définie en x_0.

Calcule :

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; **5)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; **6)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+4x-5}$

Exercice 4: Limite à l'infini d'une fonction définie à l'infini.

a) Calcule la limite en x_0 de chacune des fonctions

1) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ $x_0 = -\infty$; **2)** $f(x) = -3x^3 + 5x^4 - 7$ $x_0 = +\infty$; **3)** $f(x) = 4x^3 - 5x$ $x_0 = +\infty$

4) $f(x) = \dfrac{x-5}{2x+4}$ $x_0 = -\infty$; **5)** $f(x) = \dfrac{5-2x}{2x+4}$ $x_0 = +\infty$; **6)** $f(x) = \dfrac{x^2-8}{-2x+4}$ $x_0 = +\infty$

7) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ $x_0 = -\infty$; **8)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{1+x}}$ $x_0 = +\infty$; **9)** $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ $x_0 = +\infty$

Exercice 5: Limite à gauche et limite à droite

Calculer :

1) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ **4)** $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4x^2+2x-1}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 6^-} 5x+6-\frac{7}{x-6}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 6^+} \sqrt{2x-12}$ **7)** $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{\frac{1}{3-x}}$ **8)** $\lim\limits_{x\to 3^+} 5x+3-\frac{1}{\sqrt{3-x}}$

9) $\lim\limits_{x\to -3^-} x+3$ **10)** $\lim\limits_{x\to 2^-} 2-x^2$ **11)** $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{2x-6}$ **12)** $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-7}{6-2x}$

Exercice 6: Approfondissement

On considère la fonction suivante : $g(x) = \dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$

1. Détermine le domaine de définition de g.
2. Calcule les limites aux bornes de Dg. En déduire les asymptotes
3. Détermine les réels a, b et c tels que : $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.
4. Montre que la droite d'équation y = x + 2 est une asymptote oblique à cg.

Exercice 7: Approfondissement

On donne $p(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1. Montre que 2 est une racine de $p(x)$.
2. Factorise $p(x)$.
3. Résoudre $p(x) = 0$ et $p(x) \geq 0$.
4. En déduire le domaine de définition :
   a) $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{p(x)}$
   b) $f(x) = \sqrt{p(x)}$.
   c) Calcule les limites aux bornes des $h(x)$, en déduire les asymptotes.
   d) Calcule les limites aux bornes des $f(x)$, en déduire les asymptotes.

Exercice 8: Continuité en un point

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} \ si \ x \geq 2 \\ \frac{4}{x^2} \ si \ 0 < x < 2 \end{cases}$. Montrer que f est continue en 2.

Exercice 9: Continuité en un point

On donne la fonction f définie de IR vers IR par : $\begin{cases} pour...x \leq ..2.......f(x) = 2x^2 - x + 5 \\ pour...x \succ 2.........f(x) = 3x + 1 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$.

Exercice 10: Continuité en un point

On donne la fonction f définie de IR vers IR par : $\begin{cases} pour...x \leq 0.......g(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+2} \\ pour...x \succ 0........g(x) = \dfrac{2x^2+x+3}{x^2+5x-2} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

Exercice 11: Continuité d'une fonction usuelle

Pour chacune des fonctions suivantes, rappeler sur quel(s) ensemble(s) la fonction est définie et continue.

$f_1 : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + 1$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto |x|$ $\quad$ $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $f_4 : x \mapsto 1/x$

Exercice 12: Continuité sur un intervalle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} |x| + x + 1 \ si \ x \leq 1 \\ \sqrt{x}(x^2 + 2) \ si \ x > 1 \end{cases}$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
2) Etudier la continuité de f en 1.
3) En déduire la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice 13: Continuité sur un intervalle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x} \ si \ x > 4 \\ (x+k)^2 \ si \ x \leq 4 \end{cases}$. Déterminer la(les) valeur(s) du réel k pour que f soit continue sur son ensemble de définition.

SERIE N°5 : DERIVABILITE

Rappel du cours portant sur le nombre de dérivé

Soit f une fonction définie continue dans un voisinage de x_0 contenant x_0, f est dérivable en x_0 ssi : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *...est....finie*

Cette limite , notée f'(x_0), est ***appelée nombre dérivé de f en x_0***

Exercice 1: Nombre dérivé

Calculer le nombre de dérivé de f en x_0 :

1. $f(x) = 3x - 2.$ $x_0 = 0$ **2.** $f(x) = 3x^2 + 2x - 1.$ $x_0 = 2$

2. $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$ $x_0 = 2$ **4.** $f(x) = \sqrt{5 - x}$ $x_0 = 4$

Exercice 2: Dérivé d'une fonction en un point

Etudie la dérivée de f en x_0 :

1. $f(x) = 2x^2 - x + 1.$ $x_0 = 2$; **2.** $f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1}$ $x_0 = 1$; **3.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ $x_0 = 2$

4. $f(x) = |x - 3|$ $x_0 = 3$; **5.** $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$ $x_0 = 4$; **6.** $f(x) = \sqrt{2x + 5}$ $x_0 = -\frac{1}{2}$

Rappel du cours portant sur la dérivée d'une fonction : constante ; linéaire et affine

- ✓ *La fonction f(x) = k (k est un nombre réel) a pour dérivé f'(x) = 0.*
- ✓ *La fonction f(x) = ax (a est un nombre réel) a pour dérivé f'(x) = a.*
- ✓ *La fonction f(x) = ax + b (a et b sont des nombres réels) a pour dérivé f'(x) = a.*

Exercice 3: Calcule de dérivé d'une fonction constante ; linéaire et affine.

Déterminer la fonction dérivée f' de f.

1. $f(x) = 4$; **2.** $f(x) = 12x$; **3.** $f(x) = 4x + 2$; **4.** $f(x) = 4 - 3x$;

5. $f(x) = \frac{2}{5}4$; **6.** $f(x) = \frac{3}{2}x$; **7.** $f(x) = -4x + 8$; **8.** $f(x) = 1 - \frac{5}{7}x$;

Rappel du cours portant sur la dérivée d'une fonction : Polynôme

- ✓ *La fonction f(x) = x^n (n est un nombre entier) a pour dérivé f'(x) = $n\,x^{n-1}$.*

Exercice 4: Calcule de la dérivée d'une fonction polynôme

Déterminer la fonction dérivée f' de f.

1. $f(x) = x^2 + x - 1.$; **2.** $f(x) = -2x^3 - x + 6.$ **3.** $f(x) = x^7$; **4.** $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x - 1.$

5. $f(x) = 5x^2 + 3x - 5$; **6.** $f(x) = -\frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 7x - 12x^3 - 6$; **7.** $f(x) = x^7$.

Rappel du cours portant sur la dérivée d'une fonction : Produit

- ✓ *La fonction f(x) = $u \times v$ a pour dérivé f'(x) = u'v + v'u.*

Exercice 5: Calcule de la dérivée d'un produit

Déterminer la fonction dérivée f' de f.

1. $f(x) = (x + 1)(3x + 1).$ **2.** $f(x) = (3x - 5)(2x^2 - 1)$ **3.** $f(x) = (-2x^2 - 4x + 6)(3x - 5).$

4. $f(x) = (2x + 3)(-x + 5).$ **5.** $f(x) = (\frac{2}{3}x - 5)(2x^2 - 2x)$ **6.** $f(x) = (-2x^2 - 4x + 6)(3x - 5).$

Rappel du cours portant sur la dérivée d'une fonction : Rationnelle

✓ *La fonction* $f(x) = \frac{u}{v}$ *a pour dérivé* $f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Exercice 6: Calcule de la dérivée d'une fonction rationnelle

Déterminer la fonction dérivée f' de f.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ **2.** $f(x) = \frac{5}{x+2}$ **3.** $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ **4.** $f(x) = \frac{5x-1}{x+4}$ **5.** $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3-2}$

Rappel du cours portant sur la dérivée d'une fonction : Puissance

✓ *La fonction* $f(x) = u^n$ *a pour dérivé* $f'(x) = nu'.u^{n-1}$

Exercice 7: Calcule de dérivé d'une fonction puissance

1. $f(x) = (x+3)^2$ **2.** $f(x) = (5x-2)^3$ **3.** $f(x) = (2x^2+5x-2)^4$ **4.** $f(x) = (2-7x)^3$

5. $f(x) = \left(\frac{2x-1}{-x+1}\right)^2$ **6.** $f(x) = \left(\frac{2-5x}{x-1}\right)^4$ **7.** $f(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$ **8.** $f(x) = \left(\frac{4x+3}{5}\right)^4$.

Rappel du cours portant sur la dérivée d'une fonction : Irrationnel

✓ *La fonction* $f(x) = \sqrt{u}$ *a pour dérivé* $f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exercice 8: Calcule de dérivé d'une fonction irrationnelle

Exercice 9: « Dérivé d'une fonction irrationnelle »

Déterminer la fonction dérivée f' de f.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ **2.** $f(x) = \sqrt{5x-4}$ **3.** $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$ **4.** $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{-2x+3}}$

5. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x}}$ **6.** $f(x) = \sqrt{\frac{3}{4}x^2-5}$ **7.** $f(x) = \sqrt{5x^2-4x+2}$ **8.** $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{4x+3}}$

Rappel du cours portant sur l'équation de la tangente

L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est de : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exercice 10:

Déterminez l'équation de la tangente à la courbe (C) représentant la fonction f au point A d'abscisse x_A dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^2 + 3x - 12$ $x_A = 5$ **b)** $f(x) = x^3 - 3x + 6$ $x_A = 1$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$. $x_0 = -1$. **d)** $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ $x_0 = 3$. **e)** $f(x) = \sqrt{3x-1}$ $x_0 = 1$.

Exercice 11: Approfondissement

Déterminer la fonction dérivée de chacune des expressions suivantes

1. $f(x) = \frac{1}{5}(3x^3-2x+7)$; **2.** $f(x) = \frac{3x^2-2x+7}{5}$ **3.** $f(x) = (ax^2+bx+c)(2x+5)$.

4. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$; **5.** $f(x) = \frac{(x+1)(3-2x)}{4x+2}$ **6.** $f(x) = \left(\frac{2x+3}{3x-5}\right)^3$.

7. $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$ **8.** $f(x) = \frac{\sqrt{5x+4}-2}{x}$ **9.** $f(x) = \sqrt{5x^2-4}$ $-5x^2 + 3x$.

SERIE N°6 : VARIATION D'UNE FONCTION

RAPPEL DU COURS PORTANT SUR LA VARIATION

Propriété 1:
f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert k.
Pour dresser le tableau de variation de f, on étudie le signe de sa dérivée.

Propriété 2:
f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert k.
Si f ' est strictement positive sur k alors f est strictement croissant sur k.
Si f ' est strictement négative sur k alors f est strictement décroissant sur k.

Propriété 3:
f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert k. x_0 un nombre réel appartenant à k.
f (x_0) est un extremum relatif de la fonction f si est seulement si f ' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Exercice 1: « Tableau de variation »
Soit une fonction numérique dont le tableau de variation est le suivant :

x	-1		1,5		4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	13	↘	0,5	↗	13

1. Donner le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction *f*.

2. Donner les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$.

3. Donner l'extrémum de $\mathscr{C}_f$.

4. Etudier la variation de *f*.

Exercice 2: « Tableau de variation »
Dresse le tableau de variation de chacune des fonctions ci-dessous,

1. $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$; **2.** $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$; **3.** $f(x) = \dfrac{2-3x}{2+x}$; **4.** $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

On donnera d'abord : le domaine de définition ; calculer les limites aux bornes du domaine de définition puis déduire les asymptotes ; calculer la dérivée ; étudier le signe de la dérivée et en fin, on dressera le tableau de variation.

Exercice 3: « Tableau de variation »
Soit une fonction numérique dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1. Donner le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
2. Donner les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
3. Donner les extrémums de $\mathscr{C}_f$.
4. Donner les asymptotes verticales de $\mathscr{C}_f$.
5. Etudier la variation de f.
6. Trace la courbe représentative

SERIE N°7: ETUDE D'UNE FONCTION

Exercice 1: « Fonction polynôme »

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Déterminer le domaine de définition D*f* de *f*.
2. Calculer les limites aux bornes de D*f*.
3. Calculer *f* ' la fonction dérivée de *f*.
4. Dresser le tableau de variation de *f*.
5. Montrer que I (0 ; 2) est centre de symétrique de la courbe ($\mathscr{C}$) représentation graphique de f dans (O ; I ; J).
6. Donner une équation de la droite (d) tangent à ($\mathscr{C}$) en puis tracer ($\mathscr{C}$) et (d).

Exercice 2: « Fonction rationnelle »

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

On appelle ($\mathscr{C}_f$) la courbe représentation graphique de f dans un repère ortho normal (O ; I ; J), unité 1cm.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de *f*.
2. Calculer les limites aux bornes de $\mathscr{D}f$.
3. En déduire l'existence des deux asymptotes à ($\mathscr{C}_f$) .
4. Montre que le point M (-1 ; 2) est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}_f$).
5. Calculer *f* ' la fonction dérivée de *f*. puis dresser le tableau de variation de *f*.
6. Tracer ($\mathscr{C}_f$) et ses asymptotes .

Exercice 3: « Fonction polynôme »

Soit *f* la fonction numérique définie par : $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Déterminer le domaine de définition D*f* de *f*.
2. Calculer les limites aux bornes de D*f*.
3. Calculer *f* ' la fonction dérivée de *f*.
4. Dresser le tableau de variation de *f*.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire les points d'intersections de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses..
6. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

Exercice 4: « Fonction rationnelle »

Soit *f* la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2-3x}{2+x}$. On appelle (C) la courbe représentation graphique de *f* dans un repère orthonormal (O ; I ; J).

1. Déterminer le domaine de définition d*f* de *f*.
2. Calculer les limites aux bornes de *f*. En déduire l'existence des deux asymptotes dont on donnera des équations de droite.
3. Calculer $f'(x)$ la fonction dérivée de *f*.
4. Etudier les variations de *f* et établir le tableau de variation.
5. Donner une équation de la tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse O.
6. Tracer ($\mathscr{C}$), les asymptotes et la tangente dans le repère orthonormé (O ; I ; J).

Exercice 5: « Fonction polynôme »

Soit *f* la fonction numérique définie sur IR par : $f(x) = ax^3 + bx - 2$ ou a e b sont des nombres réels, ($\mathscr{C}$f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la dérivée f ' de f.
2. Détermine les réels a et b sachant que : f '(0) = -3 et f '(1) = 0.
3. Etudier les variations de *f* et établir le tableau de variation.
4. Montre que le point S(0 ;-2) est centre de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}$f).
5. Détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$f) avec l'axe des abscisses.
6. Détermine une équation de la tangente à (($\mathscr{C}$f) en chacun de ces points.

7. Trace les tangentes puis la courbe ($\mathscr{C}$f) dans le repère.

Exercice 5: « Fonction rationnelle »

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 1}$.

On appelle ($\mathscr{C}_f$) la courbe représentation graphique de f dans un repère ortho normal (O ; I ; J), unité 1cm.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de *f*.
2. Calculer les limites aux bornes de *f*.
3. En déduire l'existence des deux asymptotes dont on déterminera oblique à ($\mathscr{C}_f$) et préciser l'autre asymptote.
4. Etudier la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à (d).
5. Calculer *f '* la fonction dérivée de *f*.
6. Dresser le tableau de variation de *f*.
7. Montrer que ($\mathscr{C}_f$) rencontre l'axe des abscisses aux points A et B d'abscisse respectifs $x_A = -2$ et $x_B = 1$.
8. Donner une équation de la tangente à ($\mathscr{C}_f$) en B.
9. Tracer (C), les asymptotes et les tangentes en A et en B.

Exercice 6: « Fonction rationnelle »

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$.

On appelle ($\mathscr{C}_f$) la courbe représentation graphique de f dans un repère ortho normal (O ; I ; J), unité 2cm.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de *f*.
2. Calculer les limites aux bornes de *f*.
3. Détermine les réels a et b tels que : pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = x + a + \dfrac{b}{x-1}$.
4. En déduire que la droite (d) d'équation y = x – 3 est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$. Donner l'autre asymptote de la courbe de $\mathscr{C}$.
5. Détermine les coordonnées de I , point d'intersection des deux asymptotes de la courbe de ($\mathscr{C}_f$) , en justifiant la réponse .
6. Montre que le point I(1 ; - 2) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
7. Calculer *f '* la fonction dérivée de *f*.
8. Dresser le tableau de variation de *f*.
9. Donner une équation de la tangente à ($\mathscr{C}_f$) en x = 2.
10. Tracer (C), les asymptotes et le tangente.

Exercice 8: « Approfondissement »

Soit f la fonction numérique définie par : $h(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_h$ de *h*.
2. Calculer les limites aux bornes de *h*.
3. Etudie la parité de h puis donne son interprétation géométrique.
4. Calculer *h '* la fonction dérivée de *h*.
5. Dresser le tableau de variation de *h*.
6. Donne une allure de la courbe de h.

SERIE N°8: SUITE ARITHMETIQUE ET SUITE GEOMETRIQUE

RAPPEL DU COURS PORTANT LES SUITES :

I-SUITE ARITHMETIQUE:

1. Définition:

Une suite (U_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = U_n + r$.   r est appelé **raison** de la suite.

2. Calcul de U_n:

Si U_n est une suite arithmétique de raison, alors pour tous les entiers naturels n et p , on a :

$$U_n = U_0 + nr \quad \text{et} \quad U_n = U_p + (n-p)r.$$

3. Somme de n premier termes:

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0, alors pour tout entier n :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots U_{n-1} = \frac{n(U_0 + U_{n-1})}{2} = \frac{nombre...de...terme(1^{er}\ terme + dernier...terme)}{2}$$

S est appelé la somme de n premiers termes de la suite (U_n). Elle est égale au produit du nombre de termes par la demi- somme des termes extrêmes.

II-SUITE GEOMETRIQUE:

1. Définition:

Une suite (U_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = q.U_n$.   q est appelé **raison** de la suite.

2. Calcul de U_n:

Si U_n est une suite géométrique de raison q , alors pour tous les entiers naturels n et p , on a :

$$U_n = U_0 q^n \quad \text{et} \quad U_n = U_p q^{n-p}.$$

3. Somme de n premier termes:

Si (U_n) est une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme U_0, alors pour tout entier n :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots U_{n-1} = \frac{U_0(1-q^n)}{1-q} = \frac{1^{er}\ terme(1-q^{nombre...de...terme})}{1-q}$$

S est appelé la somme de n premiers termes de la suite (U_n).

Remarque: Nombre de terme = (indice du dernier terme - indice du 1^{er} terme) + 1.

Exercice 1: Généralité

La suite (U_n) est définie par : $U_n = 3n - 1$

Calcule les termes d'indice 0 à 5.

Exercice 2: Généralité

On donne la suite (Un) définie par : $U_n = \dfrac{2}{n+2} + \dfrac{5}{n+5}$.

Calcule à 10^{-2} prés, les termes d'indice 0 à 4.

Exercice 3: Généralité

On donne la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = U_n - 5 \end{cases}$

Calculer U_1 e U_5.

<u>Exercice 4</u>: Suite arithmétique
Soit U_n une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 10$ et de raison -7.

1. Exprime Un en fonction de n.
2. Calcule $U_{100.}$

<u>Exercice 5</u>: Suite arithmétique
Soit U_n une suite arithmétique de premier terme $U_1 = 7$ et de raison 2,5.

1. Exprime Un en fonction de n.
2. Calcule $U_{50.}$

<u>Exercice 6</u>: Suite arithmétique
Parmi les suites suivantes, reconnaître celles qui sont des suites arithmétiques.
Pour les suites arithmétiques, précise la raison et la premier terme.

1. $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n - 5$.
2. Pour tout entier naturel n, $U_n = \frac{1}{n} + 8$.
3. Pour tout entier naturel n, $U_n = 2n^2 + 8$

<u>Exercice 7</u>: Suite arithmétique
On considère les suites numériques (U_n) définie par :

a) $U_{n+1} = U_n - 2$; b) $U_n = U_n + 2$; c) $\begin{cases} U_n = 4n - 7 \\ U_{n+1} = 4n + 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} U_n = -n + 1 \\ V_{n+1} = -n - 5 \end{cases}$

Dans chacun des cas ci-dessous :

1. Démontrer que (Un) est une suite arithmétique.
2. Indique la raison et le premier terme.
3. Exprime (Un) en fonction de n.

<u>Exercice 8</u>: Suite géométrique
Soit U_n une suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison 3.

1. Exprime Un en fonction de n.
2. Calcule $U_{7.}$

<u>Exercice 9</u>: Suite géométrique
Soit V_n une suite arithmétique de premier terme $V_1 = 7$ et de raison 4,5.

1. Exprime Un en fonction de n.
2. Calcule $U_{30.}$

<u>Exercice 10</u>: Suite géométrique
Parmi les suites suivantes, reconnaître celles qui sont des suites géométriques.
Pour les suites géométriques, précise la raison et la premier terme.

1. $U_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = -2U_n$.
2. Pour tout entier naturel n, $U_n = 8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. Pour tout entier naturel n, $U_n = 2n + 8$.

<u>Exercice 11</u>: Suite géométrique
On considère les suites numériques (V_n) définie par :

a) $v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n$; b) $7 v_n = v_{n+1}$; c) $\begin{cases} V_n = 7n \\ V_{n+1} = 2n \end{cases}$; d) $\begin{cases} V_n = 2n + 4 \\ V_{n+1} = 3n + 6 \end{cases}$

Dans chacun des cas ci-dessous :

1. Démontrer que (Vn) est une suite arithmétique.
2. Indique la raison et le premier terme.
3. Exprime (Vn) en fonction de n.

Exercice 12: « **suite récurrente** »

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{2}U_n + 1 \end{cases}$

1. Calculer U_1 et U_2.

2. On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n + 2$ par tout n appartient à IN.

a) Calculer V_0 et V_1.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme de (V_n).

c) Exprimer V_n puis Un en fonction de n.

3. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ en fonction de n puis $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$ en fonction de n.

Exercice 13: « Suite arithmétique dans la vie courante »

Un particulier effectue un devis auprès d'une entreprise de forage. Le cout du forage d'un puits est calculé de la manière suivante :

- Le premier mètre coute 200F.
- Chaque mètre supplémentaire coute 70Fdeplus que le précédent.

On note U_n le prix du $n^{ième}$ foré. Ainsi $U_1 = 200$.

1. Calcule U_2 et U_3.
2. Quelle est la nature de la suite U_n ? Donner l'expression de Un en fonction de n.
3. Déterminer le prix à payer pour forer un puits de 9 mètres de profondeur.

Exercice 14:

Une personne loue une maison à partir du 1^{er} janvier 2010. Le loyer annuel initial est 250000^f.

La personne s'engage à occuper la maison pendant 10 ans complets et accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer (c'est-à-dire chaque année, il paye 5% de plus que l'année précédente).

On désigne par U_n le loyer payé lors de la $n^{ième}$ année.

1) Calculer le loyer U_2 payé au 1^{er} janvier 2011.
2) a) Calculer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire la nature de la suite (U_n).
a) donner l'expression de U_n en fonction de n. Calculer U_{10}.
3) Quel est le montant total des loyers au bout des 10 années ?

Exercice 15: « **Détermination d'une suite** »

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite arithmétique telle que $U_8 = 1$ et $U_{25} = -16$.

1. Déterminer la raison r et le premier terme U_1 de cette suite.

2. Exprimer U_n en fonction de n.

Exercice 16: « **Détermination d'une suite** »

(U_n) est une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q strictement positif.

1. Déterminer q sachant que : $625\, U_{12} = 16\, U_8$

(On remarquera que : $625 = 5^{'4}$ et $16 = 2^4$)

2. Calculer U_1 sachant que : $U_3 = \dfrac{12}{125}$.

3. On pose $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

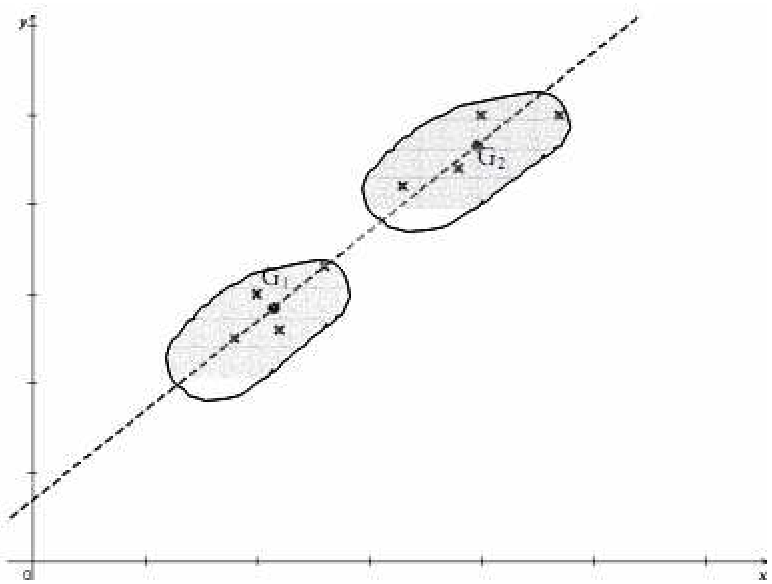
SERIE N°9: STATISTIQUES

Rappel de cours

La méthode de Mayer consiste à partager un nuage de points dans l'ordre croissant de leurs abscisses en deux sous groupes de même effectifs.

Chacun des deux sous-groupes est alors remplacé par le point dont les coordonnées sont respectivement :

- *En abscisse, la moyenne arithmétique des abscisses des points du sous-groupe.*
- *En ordonnée, la moyenne arithmétique des ordonnées des points du sous-groupe.*



Par ces points que l'on nomme G1 et G2 passe une seule droite qui sera la droite d'ajustement.

On détermine l'équation de la droite à partir des coordonnées de ces deux points :

$$\left.\begin{array}{l} G_1 : y_1 = ax_1 + b \\ G_2 : y_2 = ax_2 + b \end{array}\right\}$$

a et b sont les inconnues que l'on cherche.

x_1 et y_1 sont les coordonnées du premier point G_1.

x_2 et y_2 sont les coordonnées du deuxième point G_2.

Exercice 1:

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du prix de la tartelette aux framboises dans une pâtisserie.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'accident y_i	1,75	2	2,1	2,25	2 ,4	2,55

1. Représenter cette série statistique dans un repère orthonormé (unités 1cm pour 1 unité en abscisse et 2cm pour une unité en ordonnée). Peut-on envisager un ajustement affine ?

2. Trace à main levée la droite d'ajustement.

Exercice 2:

Le tableau suivant indique, pour chaque année, le nombre d'accidents causés par les automobilistes sur la circulation.

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'accident y_i	266	281	312	334	355	374	395

1. Construire le nuage des points associés à cette série statistique (x_i, y_i).

2. Trace à main levée la droite de régression.

Exercice 3:

Un fermier doit embaucher des ouvriers agricoles.

Lors de précédents recrutements analogues, il a fallu une étude statistique et a dressé le tableau suivant.

Salaires proposés en FCFA (x_i)	60000	64000	68000	72000
Nombres de candidatures (y_i)	11	17	20	25

1. Construire le nuage des points associés à cette série statistique (x_i, y_i).

2. *Méthode de la droite de Mayer* :

a) On appelle G_1 le point moyen des deux premiers relevés et G_2 le point moyen des deux derniers relevés. Calcule les coordonnées de G_1 et de G_2.

b) Donner l'équation de la droite de (G_1G_2).

SERIE N°10: DENOMBREMENT

RAPPEL DU COURS PORTANT SUR LE DENOMBREMENT:

I- p-liste:

1. Définition: Une p-liste de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est une suite ordonnée constituée de p éléments distincts ou non de cet ensemble. ($p < n$).

2. Propriété: Le nombre de p-listes de p éléments pris dans un ensemble à n élément est égal à n^p.

Remarque 1: Il peut y avoir répétition d'un même élément dans une p-liste.

Remarque 2: Si l'énoncé contient les mots **successifs** et **avec remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété. Le modèle mathématique est la p-liste.

II. Permutation:

1. Définition :

Une permutation de n élément est un arrangement de n éléments pris parmi n.

2. Propriété: le nombre de permutation de n élément est : n ! = n (n - 1) (n - 2)......2x1

Remarque 2: Si l'énoncé contient le mot **successif**, il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

III- Arrangement:

1. Définition : un arrangement de p éléments sur un ensemble à n éléments est une p-liste dans laquelle les éléments sont deux à deux distincts. ($p \leq n$)

2. Propriété: Le nombre d'arrangement de p élément pris dans un ensemble à n éléments est égal à : A_n^p

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque 1 : il ne peut plus y avoir répétition d'un même élément.

Remarque 2 : Si l'énoncé contient les mots **successif** et **sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).

Le modèle mathématique est l'arrangement.

Remarque 3 : Si n = p , on a une permutation.

IV-Combinaison:

1. Définition : Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments d'un ensemble E à n éléments est un sous ensembles de p éléments pris parmi les n éléments de E. ($p < n$)

2. Propriété:

Le nombre de combinaisons de p élément pris dans un ensemble à n éléments est égal au coefficient binomial : C_n^p tel que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarque 1: $\{x_1 ; x_2; x_3 ; x_4;.........; x_p\}$ et $\{x_2 ; x_1; x_3 ; x_4;.........; x_p\}$ représente la même combinaison, ce qui fait la différence avec un arrangement.

Remarque 2: Si l'énoncé contient le mot **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance. Le modèle mathématique est la combinaison.

Exercice 1: « Calcul élémentaire »

1. Calculer les nombres suivants : 3^2 ; 5^3 ; 7^6 et 11^4.

2. Calculer les nombres suivants : 0 ! ; 5 ! ; 6 ! et 10 !

3. Calculer les nombres suivants : A_3^2 A_6^3 A_{10}^5 A_1^0

4. Calculer les nombres suivants : C_5^3 C_4^4 C_7^3 C_6^2

<u>Exercice 2</u>: « Calcul élémentaire »

1. Calculer les nombres suivants :

a) $A_3^2 \times A_4^2$ b) $C_4^2 \times C_3^6$ c) $A_5^3 + A_5^2$ d) $C_3^1 + C_3^2$

2. Soient n et p des nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$. Exprimer en fonction de n et p les nombres suivants : $\dfrac{A_n^p}{A_{n-1}^p}$ $\dfrac{A_n^p}{A_n^{p-1}}$ C_n^{n-3}

<u>Exercice 3</u>: « Le code PIN d'un portable »

Le cde PIN d'un téléphone portable est un nombre de quatre chiffres choisis parmi :

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9.

1. Quel est le nombre de codes possibles.
2. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres deux à deux distincts ?

<u>Exercice 4</u>: « tirage et boule »

Une urne contient cinq boules blanches et trois boules rouges indiscernables au toucher.

1. On tire successivement avec remise trois boules dans l'urne.
Combien y a-t-il de tirages possibles.

2. On tire simultanément trois boules dans l'urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

3. On tire successivement sans remise quatre boules dans l'urne.
Combien y a-t-il de tirages possibles.

<u>Exercice 5</u>: « tirage et boule »

Un sac contient 10 boules numérotées de 1 à 10 ; 2 boules rouges numérotées 1 à 2 et 3 boules noires numérotées 1 ; 2 et 3.

1. On tire simultanément 3 boules du sac. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. On tire successivement sans remise 3 boules du sac. Déterminer le nombre de tirage

<u>Exercice 6</u>: « Formation politique »

Cinq formations politiques de même envergure dont celui au pouvoir partent en compétition électorale.
On suppose que la chance pour que deux partis politiques aient le même suffrage et nulle.
Quel est le nombre de classements possibles.

<u>Exercice 7</u>: « Recrutement homme et femme »

Lors d'un recrutement, le chef du personnel d'une société de la place doit choisir 5 personnes parmi 13 hommes et 7 femmes.

1. Dénombrer les choix possibles pour ce recrutement.
2. Calculer le cardinal des événements suivants :

A : « choisir 2 femmes et 3 hommes ».
B : « choisir 2 hommes exactement ».
C : « choisir au moins 2 hommes ». <u>Extrait</u>: bac série L

SUJET 1

EXERCICE :1 **(10pts)**

Soit le polynôme $f(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1) Vérifier que (-2) est une racine de $p(x)$ **(1pt)**
2) Factoriser complètement $p(x)$ **(1pt)**
3) Résoudre dans IR $p(x) = 0$ *puis* $p(x-5) = 0$ **(2pts)**
4) Résoudre dans IR $p(x) \leq 0$ **(1pt)**
5) Soit $T(x) = x^2 - x - 6$, factoriser $T(x)$ **(1pt)**
6) On pose $f(x) = \frac{p(x)}{T(x)}$ Déterminer la condition d'existence de f **(1pt)**
   a) Simplifier $f(x)$ **(1pt)**
   b) Résoudre dans IR $f(x) = 0$ **(1pt)**
   c) Résoudre dans IR $f(x) > 0$ **(1pt)**

EXERCICE :2 **(5pts)**

Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ **(1pt)** b) $\begin{cases} 2x + y < 4 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$ **(2pt)** c) $\begin{cases} x + 3y + z = 15 \\ 2x + 2y - 5z = -10 \\ -3x + y + 2z = 5 \end{cases}$ **(2pt)**

EXERCICE :3 **(5pts)**

A. Déterminer l'ensemble de définition de ces fonctions
   a) $f(x) = x^3 - x^2 - 13x - 6$ **(0,5pt)**
   b) $G(x)= \frac{x+2x^2+2}{x-3}$ **(1pt)**
   c) $H(x)= \sqrt{x+5}$ **(1pt)**

B. Calculer les limites en x_0
   a) $f(x)= \frac{x+2x^2+2}{x-3}$ $x_0=+\infty$ **(1pt)** ; b) $f(x) = -x^3 + x^2 + 13x - 6$ $x_0= -\infty$ **(0,5pt)**
   b) $F(x)=\frac{x+2x^2-3}{x-1}$ $x_0=1$ **(1pt)** ;

EXERCICE :4 **(5pts)**

I-Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 2x - 3$

1-Déterminer a pour que $P(x)$ admette 1 comme racine

2- Dans la suite on prend a=3 et $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

a-Déterminer Déterminer a ,b, et c tel que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

Déterminer la factorisation optimale de f

II Soit la fonction $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x-2}$

Déterminer a , b , et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

SUJET 2

Exercice 1 ☹ (5points)

A°) Mettre sous forme canonique le trinôme Suivant:

a) $x^2 + 2x + 5$

B°) Résous dans IR, les équations suivantes

a) $x^2 - 9x = 0$

b) $4x^2 - x + 3 = 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

C°) Factoriser, lorsque c'est possible le trinômes suivant : $2x^2 + 3x + 1$

D°) Résoudre dans IR les inéquations suivantes

$a)$ $-2x^2 + x - 1 \geq 0$

b°) $-49x^2 - 9 \leq 0$

Exercice 2 ☹ (9 points)

A°) Définir : Monôme, Polynôme, deux polynômes égaux et degré du polynôme

B°) Soit $P(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 2$

1) a) Calculer $P(-1)$ et $P(2)$.

b) Conclure. c) factoriser $P(x)$ en utilisant la méthode de votre choix.

3) On donne $Q(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$

a) Déterminer a et b pour que -1 et -2 soient racines de $Q(x)$

Exercice 3 ☹(6points)

A) Soit $f(x) = x^3 - 2x + 1$

1°)Trouve une racine évidente et conclure .

2°) Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) < 0$.

B) Soit $A(x) = x^3 - 1$.

1) Calculer $A(1)$.

2) Montrer que $A(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Déterminer trois nombres réels a, b et c par la division Euclidienne .

SUJET 3

EXERCICE N° 1 ☹***(3points)***

Définir les mots ou groupes de mots suivants .

1°) fonction et monômes semblables

2°) fonction paire et fonction impaire

EXERCICE N°2☹(**05points**)

1°) Résoudre dans IR les équations suivantes:

$A(x) = -2x^2 + 5x - 2 < 0$ $B(x) = 3x^2 - 5x + 4 \leq 0$ $C(x) = x^2 - 10x + 25 \geq 0$

2°) En déduire une factorisation $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$

EXERCICE N°3 ☹***(04pts)***

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

1°) Trouve une racine évidente de $P(x)$.

2°) En déduire une factorisation de $P(x)$ en utilisant la division Euclidienne

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ puis l'inéquation $P(x) \leq 0$.

EXERCICE N°4 ☹(05points)

On considère le polynôme $P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 9x + 2$.

1°) Calculer $P(-2)$.

2°) En déduire les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

3°) On pose $F(x) = \dfrac{P(x)}{2x+1}$.

a°) Déterminer le domaine de Définition D_F de $F(x)$

b°) Simplifier $F(x)$dans son domaine d'existence.

c°) Résoudre dans D_F : $F(x) = 0$ puis $F(x) \leq 0$.

EXERCICE N°5 ☹(03 points)

Indiquer si les fonctions suivantes sont des polynômes, et si oui, préciser leur degré :

$A(x) = x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 - \sqrt{2}x - \pi$; $B(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $C(x) = -\sqrt{5}$; **c)** $D(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$E(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$; $F(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 4}{2}$; 7; $H(x) = (2x+3)^2 - (3x-2)^2$.

Compositions

Exercice 1

On donne le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

1° Calculer P (1), P (2) et $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2° En déduire une factorisation de P(x).

Exercice 2

Résoudre l'inéquation $\frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 10}{-x^2 + 2x + 3} \leq 0$.

Exercice 3

Pour chacun des cas suivants montrer que la droite (D) est asymptote de (Cf) en $+\infty$ et préciser de quel type asymptote s'agit-elle ?

1) $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$; $y = 2$.

2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $x = 1$

3) $f(x) = 3x + 1 + \frac{2}{x+3}$; $y = 3x + 1$

Exercice 4

1) Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivante et donner sa variation sur son domaine de variation puis donner son tableau de variation après avoir calculer les limites aux bornes de son domaine de définition.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. b) $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$.

2) Déterminer une équation de la tangente à (Cf) et à (Cg) courbes représentatives respectives de f et g au point d'abscisse $x_0 = 0$.