IA/IEF Diourbel
Lycée Ex CEM Taïba Moutoupha
Année scolaire : 2021-2022

TD SUR LES APPLICATIONS

1ère S_2
Prof: M. GUEYE

Exercice 1

Parmi les correspondances suivantes préciser celles qui sont des applications.

$f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x+1|$

$g : [3; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x-3}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$

$i : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x-1}$

$j : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-4}$

$k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 2

Dites si les applications suivantes sont injectives , surjectives ou bijectives.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
$x \longmapsto E(x)$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

$i : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$
$x \longmapsto \dfrac{x+3}{x-1}$

$j : \mathbb{R} \to [-1; 1]$
$x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$k : [0; +\infty[\to [0; 1]$
$x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$l : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x; y) \longmapsto x + y$

$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x^2 + 3x$

Exercice 3

A)Montrer que la relation h et i réalise des bijections de I vers J à préciser puis expliciter leurs bijections réciproques.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x + \sqrt{x^2+1}$

B)On considère la correspondance de $\mathbb{R}$ dans lui même définie par $f(x) = \sqrt{x^2-1} - 2x$
a)Montre que la correspondance f réalise une bijection de $I = [\dfrac{2}{\sqrt{3}}; +\infty]$ vers un intervalle J à déterminer.
b)Détermine l'expression $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

Exercice 4

Soit f l'application définie par: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$

1)f est elle injective, surjective?
2)Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$
3)Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$
$x \longmapsto f(x)$ est une bijection

Exercice 5

Soit f l'application définie par: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$

1)Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$
2) f est elle surjective?
3)Soit h l'application définie par: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto f(x)$
Que représente h pour f? Montrer que h est bijective.

Exercice 6

Détermine $f \circ g$ et $g \circ f$ dans chacun des cas suivants:
1)$f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2 - 3$
2)$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ et $g(x) = x^2 + 1$

Exercice 7

On considère les fonctions suivantes:
$f_1(x) = x^2 - 3$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = 2x - 1$, $f_4(x) = x^3$, $f_5(x) = \sqrt{x}$
Écrire chacune des fonctions suivantes sous la forme $f_i \circ f_j$.
$f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ $g(x) = \sqrt{x^2-3}$
$h(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ $j(x) = (2x-1)^3$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x^2-1}}$
1)Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l''équation f(x)=y avec y un paramètre réel.
3)On considère l'application $g : [1; +\infty[- \{\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$
L'application g est -elle surjective? est elle injective?
4)Détermine le plus grand sous ensemble $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}$ pour que l'application:
$h : [1; +\infty[- \{\sqrt{2}\} \to \mathbb{F}$
$x \longmapsto f(x)$ soit bijective.

Exercice 9

Soit f l'application définie par: $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$

1)L'application f telle surjective? Est elle injective?
2)détermine le plus grand sous ensemble $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}$ pour

que l'application:
$g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{F}$
$x \longmapsto f(x)$ soit bijective.
3)Explicite g^{-1} la bijection réciproque de g.

RENFORCEMENT SUR LES POLYNOMES

Exercice 10

Soit $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b$ et $T(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
1)Détermine a et b pour que P soit factorisable par $x^2 - 3x + 2$.
2)Factorise P(x).
3)Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a)P(x)=0 b)P(-2x+3)=0 c)$P(x) \leq 0$
4)Détermine les réels a et b tel que:
$T(x) = (ax + b)(x^2 - 3x - 4)$.
On pose $S(x) = \dfrac{P(x)}{T(x)}$.
5)Détermine le domaine de définition de S(x).
6)Simplifie S(x) et étudie son signe.
7)Résous $S(x) \leq 0$ dans $\mathbb{R}$.
$R(x) = \dfrac{P(x)}{x^2 - 3}$.
8)Détermine les polynômes A(x) et B(x) tels que $R(x) = A(x) + \dfrac{B(x)}{x^2 - 3}$

Exercice 11

Les questions sont indépendantes.
1)Soit le polynôme $p = x^4 + ax^3 + 2x + b$ avec a et b des réels.
Détermine a et b pour que 1 soit une zéro double de P.
2)Trouver un polynôme f de degré 2 tel que:
f(-1)=9; f(2)=12 et f(-3)=47.
3)Soit h un polynôme $h(x) = x^3 + ax + b$.
Détermine a et b pour que 1 soit un racine double de h.
4)Montrer que si l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet trois racines a, b et c alors a+b+c=0.
on suppose que $q \neq 0$. Calculer en fonction de p et q le réel $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$
5)Soit P un polynôme de degré supérieur à 2.
p(x) divisé par $x - 2$ donne -4 comme reste.
p(x) divisé par $x + 3$ donne 2 comme reste.
Quel reste donnera t-il si on le divise par $(x-2)(x+3)$.

Exercice 12

Soit le polynôme $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ admettant trois racines a,b et c.
Sans calculer les réels a, b et c déterminer:
a+b+c; abc; $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Exercice 13

On considère un polynôme:
p(x)=$\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
1)Calculer p(a), p(b) et p(c).
2)En déduire que $p(x) = x^2$.

Exercice 14

Soit le polynôme k défini par $k(x) = x^4 + px^2 + q$.
1)Détermine les réels p et q pour que k soit divisible par $x^2 - 6x + 5$.
2)En déduire une factorisation complète de k(x).
3)Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes:
a)$k(x) \leq 0$.
b)$k(|-3x+2|) = 0$.

Exercice 15

1)En utilisant la méthodes de Hörner calculer p(2) et p(3) avec $p(x) = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$.
2)Prouver que 1 est une racine double du polynôme q défini $q(x) = x^n - n(x-1) - 1$.
3)Détermine les réels a et b pour que polynôme $r(x) = ax^{n+1} - bx^n + 1$ soit factorisable par $(x-1)^2$.

Exercice 16

Soit $p(x) = ax^2 + bx$ avec a et b des réels.
1)Déterminer les réels a et b tels que:
$p(x+1) - p(x) = x$.
2)En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a:
$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 17

Les questions indépendantes.
1)Déterminer un polynôme p unitaire de degré 3 factorisable par x-1 et ayant le même reste dans les divisions par (x-2);(x-3) et (x-4).
2)Soit p un polynôme dont les restes dans les divisions par x-1, x-2 et x-3 sont respectivement 3, 7 et 13.
Détermine le reste de la division p par (x-1)(x-2)(x-3).

Exercice 18

Soit l'équation paramétrique:
$E_m : (m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$
1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ suivant la valeurs du paramètre réel m l'équation $E_m(x) = 0$
2)Établir une relation indépendante de m entre x_1 et x_2 supposées les deux solutions de E_m
3)Pour quelles valeurs de m, l'équation admet deux solutions de signes contraires.
4)Pour quelles valeurs de m, l'équation admet deux solutions positives puis négatives?
5)Déterminer m pour que 2 soit une solution de l'équation, trouver alors l'autre solution.

"L'enseignement devrait être ainsi : celui qui le reçoit le recueille comme un don inestimable mais jamais comme une contrainte pénible."
Albert Einstein
Bon Courage!!!