IA/IEF Diourbel Lycée Ex CEM Taïba Moutoupha Année scolaire : 2021-2022	TD Barycentre - Produit Scalaire	1ère S2 Prof: M. GUEYE

Exercice 1

Soit A, B, C, D quatre points distincts et I, J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.
Soit d un réel différent de -1 et de 0.
On considère les points G et H tels que $G = bar\{(C; d), (B; 1)\}$ et $H = bar\{(C; d), (D; 1)\}$.
1) Montrer que les droites (IJ) et (GH) sont parallèles.
2) On choisit $d = 3$, déterminer l'ensemble des points M tels que :
$\|3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$ $\quad \|3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = 8\|$

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral et $ABDC$ est un parallélogramme.
1) Construire le point G vérifiant $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ et montrer que G est le barycentre du système $\{(A; 2), (B; -1), (C; 2)\}$.
Soit I milieu de $[AC]$.
2) Démontrer que G est barycentre de B et I affectés de coefficients que l'on déterminera.
3) En déduire que G appartient à la médiatrice de $[AC]$.
4) En désignant par H l'isobarycentre de G et D déterminer puis construire l'ensemble (Ω) des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\| = 6AB$.

Exercice 3

Soit I, J et K trois points tels que : $2\overrightarrow{IK} - 3\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{0}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que K soit le barycentre de $\{(I; a), (J; b)\}$.
2. Déterminer un réel t tel que K soit le barycentre de $\{(I; 1), (J; t)\}$.
3. Déterminer deux réels x et y tels que I soit le barycentre de $\{(J; x), (K; y)\}$.
4. Déterminer un réel z tel que J soit le barycentre de $\{(I; z), (K; 3)\}$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un rectangle. On note I le milieu de $[AB]$ et E le centre de gravité du triangle ABC.

1. Construire le barycentre F de $\{(C, 1); (D, 3)\}$.
2. Démontrer que le milieu G de $[ED]$ est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 3)\}$.
3. Démontrer que G appartient à (IF).
4. Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. Montrer que le milieu de $[BC]$ appartient à la droite (GK).

Exercice 5

Soit $ABDC$ un parallélogramme et soit G le barycentre du système $\{(A, 3); (B, 2); (C, 3); (D; 2)\}$.

1. Construire les barycentres E et F des systèmes respectifs $\{(A, 3); (B, 2)\}$ et $\{(C, 3); (D; 2)\}$.
2. Démontrer que G est le milieu de $[EF]$, puis construire le point G.
3. Soit I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$, démontrer que (EF) et(IJ) sont sécantes.

Exercice 6

ABC est un triangle, I est le point de la droite (BC) tel que $3\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, J est le point de la droite (AC) tel que, $3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$, K est le milieu de $[AB]$. On se propose de montrer que les droites $(AI), (BJ)$ et (CK) sont concourantes.

1. Faire une figure précise.
2. On note G le barycentre de $\{(A, 3); (B, 3); (C, 1)\}$.
   $a)$ Montrer que G est aussi le barycentre de $\{(I, 4); (A; 3)\}$. En déduire que $G \in (AI)$.
   $b)$ Montrer que G est aussi le barycentre de $\{(J, 4); (B; 3)\}$. En déduire que $G \in (BJ)$.
   $c)$ Montrer que G appartient aussi à la droite (CK). Conclure.

Exercice 7

On considère les points A(5;0;0) , B(2;-1;1) , C(10;1;-2) et D(3;2;1)

1. Montrer que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre $ABCD$.
3. Quelles sont les coordonnées du centre de gravité A' du triangle BCD ?
4. Montrer que A, G et A' sont alignés.
5. Quelle est la position de G par rapport aux points A et A' ?

Exercice 8

1. Exprimer, en fonction des produits scalaires $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u}^2$; $\overrightarrow{v}^2$
   $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$; $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$; $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - 2\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}$
2. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que :$\|u\| = 4, \|v\| = 7$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 13$.
   Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{u}.2\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}).(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

3. On donne $\|\overrightarrow{u}\| = 5, \|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -7$.
Démontrer que les vecteurs $(\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u})$ sont orthogonaux.

Exercice 9

Calculer l'approximation d'ordre 2 par excès de la mesure en degré de l'angle $B\hat{A}C$ dans chaque cas suivant :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12, \quad AB = 5$ et $AC = 3$
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8, \quad AB = 5$ et $AC = 2$
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -5, \quad AB = 5$ et $AC = 4$

Exercice 10

On se place dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, où $A(1;2)$ et $B(-1;3)$.

1. Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$.
2. Déterminer son rayon r et les coordonnées de son centre W
3. Démontrer que l'équation : $x^2+y^2-2x-8y-8 = 0$ est celle d'un cercle $(\mathcal{C})$.
Déterminer son centre et son rayon puis les coordonnées des points d'intersection C et D du cercle $(\mathcal{C})$ avec la droite $(\mathcal{D}) : x + 2y + 1 = 0$
4. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point C.

Exercice 11

Soit les points $A(-1;1), B(5;-2)$ et $C(4;2)$.

1. Déterminer une équation de la perpendiculaire à la droite (AB) contenant le point C.
2. Déterminer une équation de la perpendiculaire à la droite (BC) contenant le point A.

Exercice 12

Soit ABC un triangle équilatéral de coté 4. On note A' le milieu du segment $[BC]$.

1. Faire une figure et calculer la valeur exacte de AA'
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}$.
3. Calculer $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2$. En déduire $\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\|$.

Exercice 13

Soit A et B deux points tels que $AB = 8$.On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
2. Déterminer et tracer sur la même figure l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}.MB = 9$ et $\overrightarrow{MA}.MB = 16$

Exercice 14

Soit un segment $[AB]$ tel que $AB = 6$ et I le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
2. Déterminer et tracer sur une même figure l'ensemble des points M du plan vérifiant : $a)MA^2 - MB^2 = -36$; $\quad b)MA^2 - MB^2 = 0$; $c)MA^2 - MB^2 = 60$.

Exercice 15

Soit A et B deux points distincts du plan. On cherche l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = 2$.

1. Montrer que le problème revient à montrer que $MA^2 - 4MB^2 = 0$
2. Soit I le barycentre de $(A;1)$ et $(B;2)$ et J le barycentre de $(A;1)$ et $(B:-2)$.
3. Montrer que I et J appartiennent à $(\mathcal{H})$.
4. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MJ}$.
5. Démontrer que M est un point de $(\mathcal{H})$ si et seulement si $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$. En déduire et construire l'ensemble $(\mathcal{H})$.

Exercice 16

ABC est un triangle. On pose $a = BC, b = AC, c = AB$. A' est le milieu de $[BC], B'$ celui de $[AC]$ et C'celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1. Montrer que pour tout point M du plan $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.
2. En calculant de deux façons différentes $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$, établir que :
$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$.
3. On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BC]$, montrer que, lors qu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c

Exercice 17

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne trois points A, B, C, tels que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Soit G le barycentre du système

$\{(A,2)\,(B,3)\,(C,3)\}$.
Construire G et calculer AG.

3. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}$ fait correspondre le réel $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

4. Démontrer que $f(M) = f(G) + 4MG^2$, pour tout point M de $(\mathcal{P})$.

5. Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

6. Déterminer l'ensemble:
$\mathcal{E} = \{M \in (\mathcal{P}) / f(M) = f(A)\}$

Exercice 18

Soit une droite d'équation $(D) : 3x - y + 5 = 0$ dans un repère orthonormé.

1. Soit $A(-1,2)$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $(\mathcal{D})$, Calculer $d(A, \mathcal{D})$. Conclure.
2. Soit $(\mathcal{T})$ la droite passant par A et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$
3. En utilisant $\overrightarrow{n}$, donner une équation cartésienne de $(\mathcal{T})$.
4. En utilisant un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$, donner une équation cartésienne de $(\mathcal{T})$.

Exercice 19

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 6$. E est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$
3. En déduire la valeur de l'angle orienté
$\alpha = (\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC})$ arrondie à $0,01$ degré près.

Exercice 20

On considère un triangle non aplati ABC de centre de gravité G.
1) Écrire la relation vectorielle vérifiée par le point G.
2) Soit f l'application du plan $(\mathcal{P})$ vers le plan vectoriel $(\mathcal{V})$ définie pour tout point du plan M par:
$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
a) Montrer que pour tout M du plan, $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MG}$.
b) Montre que si M_1 et M_2 sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{f(M_1)} = \overrightarrow{f(M_2)}$ alors ils sont confondus.
c) En déduire que G est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{f(G)} = 0$.
3) Soient A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC],[AC] et [AB].
a) Montrer que $\forall M \in (\mathcal{P})$:
$\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C}$.
b) En déduire que:
$3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C}$.
c) En déduire que les trois médianes de ABC sont concourantes en un point qu'on précisera.

Exercice 21

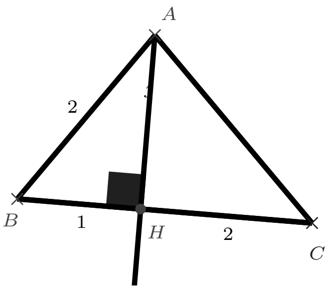
Détermine l'ensemble des points suivants:
$E_1 : x^2 + y^2 - x - 3y - 4 = 0$.
$E_2 : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$.
$E_3 : x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$.

Exercice 22

Soit $\mathcal{B}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace et les vecteurs : $\overrightarrow{u}(2;-4;3)$, $\overrightarrow{v}(-1;1;2)$ et $\overrightarrow{w}(3;1;-1)$.
Vérifie si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Exercice 23

On considère la figure suivante:



En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-dessus.
Calculer les produits scalaires suivants.
a)$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB}$.
b)$(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}).\overrightarrow{AB}$.
c)$(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$

Exercice 24

Soit ABC un triangle quelconque tel que AB=c, AC=b et BC=a.
G est le barycentre des points pondérés (A,1), (B,-1) et (C,2).
1)Justifie G existe puis construis G.
2) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.
3)Soit $f(M) = MA^2 - MB^2 + 2MC^2$. Montre que $f(M) = 2MG^2 + GA^2 - GB^2 + 2GC^2$.
4)Calculer GA^2, GB^2 et GC^2.
5)Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = a^2 + b^2$.

"L'enseignement devrait être ainsi : celui qui le reçoit le recueille comme un don inestimable mais jamais comme une contrainte pénible."
Albert Einstein

Bon Courage!!!