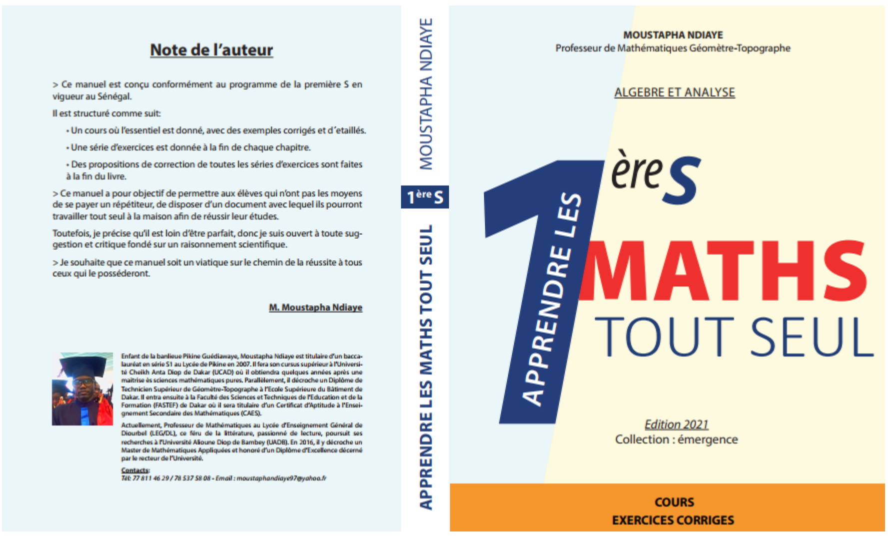
EXTRAIT DU CHAPITRE CORRECTION DES SÉRIES D'EXERCICES



Moustapha Ndiaye

Professeur de Mathématiques au Lycée Scientifique d'Excellence de Diourbel

Tel : 77 811 46 29 ; Email : moustaphandiaye97@yahoo.fr

Bismillahi-Rahmaani-Rahiim

Sois quelqu'un qui cache ses maux et ses privations, toi qui est à la recherche du savoir. Et tu auras ce que tu voudras, et tu sera élevé au dessus de tes semblables.

Ne te lamentes pas beaucoup et sois fort jusqu'à ce que les gens pensent que tu ne manques de rien.

Saches que le savoir ne sera pas donné à quelqu'un qui ne peut résister aux épreuves. En vérité, Dieu est avec les endurants.

Aies de la volonté sur l'apprentissage de tes leçons. Je suis étonné par celui qui se laisse malmener par la faim.

N'aies pas besoin d'argent ou de biens matériels. Car Dieu se charge des besoins futurs de l'apprenant.

Suis Dieu dans sa religion et avec volonté. Car la connaissance n'est jamais donnée à un mécréant.

Évites les femmes et les jeunes files et préserves-toi d'elles. Sinon, malheur à toi et tu n'auras pas la félicité.

Ne troques pas la vie de ce monde contre la vie éternelle. Car celui qui échange de la lumière contre des ténèbres le regrettera.

Cheikh Ahmadou Bamba

Avant-propos

Le livre, APPRENDRE LES MATHS TOUT SEUL 1 S, est conçu essentiellement comme un instrument de travail pour les élèves des classes de premières des séries scientifiques S_1 et S_2, en vue de les préparer aux ultérieurs concours et l'examen final à travers une formation solide en mathématiques basée sur les programmes en vigueur des classes de premières S_1 et S_2.
Toutefois, il faut notifier que le livre ne traite que les parties algèbre et analyse. La partie géométrique et les autres chapitres desdits programmes feront l'objet d'un autre tome.

La présentation s'inspire de la façon naturellement simple dont les cours sont donnés en classe ; la clarté , les couleurs et l'esthétique ont été l'objet d'une grande attention de notre part.
La hiérarchisation des connaissances a été bien accentuée pour permettre à l'élève d'assimiler plus rapidement les notions en commençant d'abord par les plus simples.
Les propriétés, théorèmes et méthodes, rigoureusement rédigés dans un style très simple, sont encadrés en couleur légèrement différenciée par leurs fonds. Les exemples sont corrigés et détaillés de façon à ce qu'ils soient compréhensibles aux élèves.

La partie réservée pour le travail personnel de l'élève est largement développée ; après chaque passage clé, des exercices sont proposés pour entrainer l'élève à la recherche suivant ses aptitudes.
Les chapitres sont clos par des séries d'exercices dont une partie du livre est entièrement consacrée à leurs corrections.

Le développement personnel, moral et émotionnel de l'élève, ainsi que la diversité culturelle et linguistique occupent une partie importante du livre ; au début de chaque chapitre on introduit une phrase ou une citation sur la motivation, la moralité ou sur le développement personnel. Sur le plan culturel, nous avons choisi de débuter le livre par le célèbre poème KUN KAATIMAN, traduit en français, de Cheikh Ahmadou Bamba.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des professeurs et des élèves. Toutes suggestions, remarques et critiques seront accueillies avec reconnaissance afin d'améliorer les prochaines éditions.
Merci d'avance.

Moustapha Ndiaye

Table des matières

Chapitre 1

Applications

INTRODUCTION

La modélisation de certaine situation de la vie quotidienne aboutit souvent à une égalité comprenant des nombres réels et un ou plusieurs inconnues désignés par des lettres. De telles égalités sont appelées équations. Résoudre une équation consiste à trouver, si possible, l'ensemble des valeurs des inconnues ou de l'inconnue pour lesquelles l'égalité est vraie.

$$a\mathbb{X}^2 + b\mathbb{X} + c = 0$$

OBJECTIFS

- *Résoudre des équations et des inéquations se ramenant au second degré.*
- *Résoudre des équations et des inéquations irrationnelles.*
- *Résoudre des systèmes d'équation dans* $\mathbb{R}^3$ *en utilisant le pivot de Gauss.*

1.1 Rappels sur les fonctions

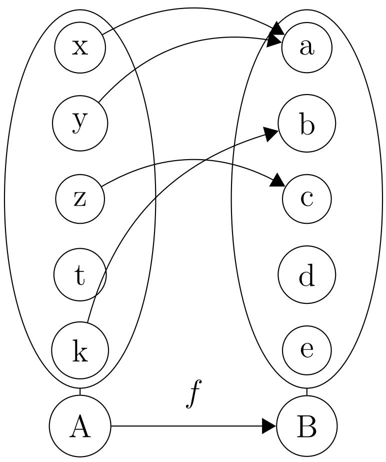
1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1.1 *

Soient A et B deux ensembles. On appelle fonction de A vers B toute relation f qui à chaque élément de A associe au plus un élément de B.

- *On note :* $f: \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$
- *On lit : f la fonction de A vers B, qui à tout x de A, associe $f(x)$.*

Illustration graphique



Vocabulaire : On considère la fonction : $f: \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

> A est appelé ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivé.

> x est appelée variable.

> $f(x_0)$ est appelée image de x_0 par f.

> Pour $y \in B$, si $y = f(x)$, alors x est appelé antécédent de y par f.

> Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, alors f est dite fonction numérique à variable réelle.

Détermination de l'image ou de l'antécédent d'un réel.

Soit f une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.

- Pour déterminer l'image d'un réel x_0 de A, on calcule $f(x_0)$.
- Pour déterminer le(s) éventuel(s) antécédent(s) d'un réel y_0 de B, on résout l'équation $f(x) = y_0$.

Exemple(s) 1.1.1.1 *Soit* $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-5x+7 \end{array}$.

1. *Déterminons l'image de 0 par* f.
   On a :
   $f(0)=(0)^2-5(0)+7=7$. *Donc 7 est l'image de 0 par* f.
2. *Déterminons les antécédents de 1 par* f.
   On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x)=1 & \Rightarrow & x^2-5x+7=1 \\ & \Rightarrow & x^2-5x+6=0 \\ & \Rightarrow & x=2 \text{ ou } x=3 \end{array}$$

   Donc les antécédents de 1 par f *sont : 2 et 3.*

1.1.2 Fonctions élémentaires

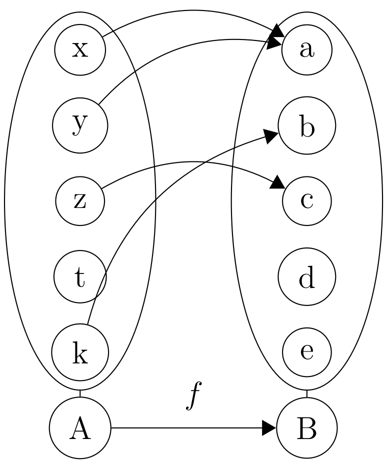
- Les fonctions numériques du type : $x \mapsto P(x)$ où P est un polynôme sont appelées fonctions polynômes
- Les fonctions numériques du type : $x \mapsto \dfrac{p(x)}{qx)}$ où p et q sont des polynômes sont appelées fonctions rationnelles.
- Les fonctions : $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \tan x$ sont appelées respectivement fonction cosinus, fonction sinus et fonctions tangente. On les appelle fonctions trigonométriques.
- Les fonctions : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto |x|$ sont appelées respectivement fonction carrée, fonction racine carrée, fonction inverse et fonction valeur absolue.

1.1.3 Domaine de définition d'une fonction

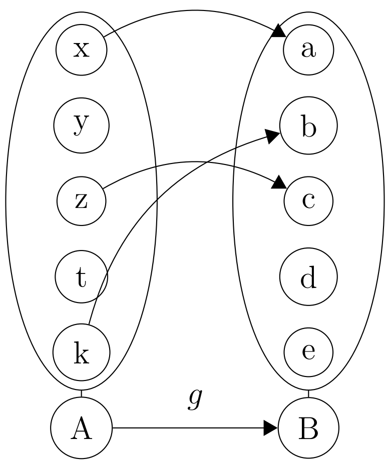
Définition 1.1.3.1 *

Soit A *et* B *deux ensembles, et* $f : A \to B$ *une fonction de* A *vers* B.
On appelle ensemble de définition de la fonction f *l'ensemble des éléments de* A *admettant une image dans* B.
On le note D_f.
$D_f = \{x \in A \ / \ f(x) \text{ existe}\}$

Illustration graphique



$D_f = \{x;\ y;\ z;\ k\}$



$D_g = \{x;\ z;\ k\}$

Propriété 1.1.3.1 *

- *Toute fonction polynôme est définie sur* $\mathbb{R}$.
- *Toute fonction rationnelle :* $x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *est définie si et seulement si* $q(x) \neq 0$.

Exemple(s) 1.1.3.1 *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.*

1. *Soit* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$
   - *Condition d'existence de* f *:*
     $f(x)$ *existe si et seulement si* $x^2+2x-3 \neq 0$.
   - *On résout :* $x^2+2x-3=0$
     $x^2+2x-3=0 \Rightarrow\ x=1$ *ou* $x=-3$.
     D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ;\ 1\}$.
2. *Soit* $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$
   - *Condition d'existence de* f *:*
     $g(x)$ *existe si et seulement si* $x^2+x+1 \neq 0$.
   - *On résout :* $x^2+x+1=0$
     $\Delta = -3$. *Donc* $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1 \neq 0$
     D'où : $D_g = \mathbb{R}$.

Exercices 1.1.3.1 *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

2) $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

3) $h(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

4) $i(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x + 1}$

Domaine de définition et opérations sur les fonctions

Propriété 1.1.3.2 *

Soit u et v deux fonctions de domaines de définition respectifs : D_u et D_v.

> *Les fonctions $u + v$ et uv ont pour domaine de définition :*

$$D_u \cap D_v$$

> *La fonction $\dfrac{u}{v}$ admet pour domaine de définition :*

$$D_u \cap D_v \setminus \{x \in \mathbb{R} \ / \ v(x) = 0\}$$

> *La fonction $\sqrt{u}$ admet pour domaine de définition :*

$$D_u \cap \{x \in \mathbb{R} \ / \ u(x) \geq 0\}$$

Exemple(s) 1.1.3.2 *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.*

1. *Soit* $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
   - *Condition d'existence de h :*
     $h(x)$ *existe si et seulement si* $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.
   - *On résout :* $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1 \quad ou \quad x = -3$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$		+	0	-	0	+	

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0 \ \Rightarrow \ x \in \ ]-\infty \ ; \ -3] \cup [1 \ ; \ +\infty[$$

$$D\text{'où : } \boxed{D_g = \,]-\infty \ ; \ -3] \cup [1 \ ; \ +\infty[}.$$

2. *Soit* $I(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+3x}-3x+1}$

- *Condition d'existence de* I :

  $I(x)$ *existe si et seulement si* $\begin{cases} x-1 \geq 0 & 1) \\ x^2+3x \geq 0 & 2) \\ \sqrt{x^2+3x}-3x+1 \neq 0 & 3) \end{cases}$.

- *On résout le système :* $\begin{cases} x-1 \geq 0 & 1) \\ x^2+3x \geq 0 & 2) \\ \sqrt{x^2+3x}-3x+1 \neq 0 & 3) \end{cases}$.

  1) $x-1 \geq 0$

$$\begin{aligned} x-1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \\ &\Rightarrow x \in [1\ ;\ +\infty[\end{aligned}$$

2) $x^2+3x \geq 0$.

$$x^2+3x=0 \Rightarrow x=0 \quad ou \quad x=-3$$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2+3x		+	0	-	0	+	

$$x^2+3x \geq 0 \Rightarrow x \in\ ]-\infty\ ;\ -3] \cup [0\ ;\ +\infty[$$

3) $\sqrt{x^2+3x}-3x+1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3x}-3x+1=0 &\Rightarrow \sqrt{x^2+3x}=3x-1 \\ &\Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

La solution du système est :

$$[1\ ;\ +\infty[\cap \Big(\ ]-\infty\ ;\ -3] \cup [0\ ;\ +\infty[\ \Big) \setminus \{1\} =]1\ ;\ +\infty[.$$

$$Donc\ :\ \boxed{D_h =]1\ ;\ +\infty[}$$

Exercices 1.1.3.2 *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = \sqrt{x^2-4}+1$

2) $h(x) = \dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x^2+x-3}{x-2}$

3) $g(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+x+2}}{x-1}$

4) $i(x) = \sqrt{\sqrt{x+1}-x+1}$

1.1.4 Composée de deux fonctions

Définition 1.1.4.1 *

Soient A, B et C trois ensembles, $f\ :\ A \to B$ et $g\ :\ B \to C$ deux fonctions.
On appelle composée de f par g la fonction de A vers C, notée $g \circ f$, définie par :

$$\forall\ x \in A,\ g \circ f(x) = g[f(x)]$$

On note :

$$\begin{array}{rccl} g \circ f & : & A & \to & C \\ & & x & \to & g[f(x)] \end{array}$$

Exemple(s) 1.1.4.1 *Soit* $f: \begin{array}{ccc}]0\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$ *et* $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & |x+1| \end{array}$.
Déterminons $g \circ f$.
On a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = |(x^2-1)+1| = |x^2| = x^2$.
Alors la composée de f par g est :

$$g \circ f: \begin{array}{ccc}]0\ ;\ +\infty[& \to & [0\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Exercices 1.1.4.1 *Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{2-x}$.*
Déterminer les expressions de : gof, fog, fof et gog.

1.1.5 Représentation graphique d'une fonction

Définition 1.1.5.1 *

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Soit f une fonction de domaine de définition D_f. On appelle courbe représentative de f l'ensemble, noté $\mathcal{C}_f$, des points M du plan de coordonnées $\left(x\ ;\ f(x)\right)$ avec $x \in\ D_f$.

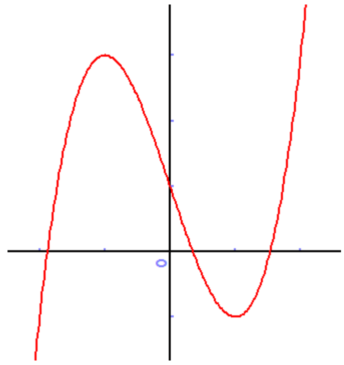
Methode :

Pour tracer la courbe de certaine fonction, on dresse d'abord un tableau, appelé tableau de valeurs, sur lequel se trouve des valeurs de x, bien choisie, ainsi que leurs images $f(x)$.
Ensuite on place ces points dans un repère.
Et enfin on les relit avec la main pour obtenir la courbe.

Exemple(s) 1.1.5.1 *Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.*
Représentons la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

- *Tableau de valeurs.*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3



Exercices 1.1.5.1 *Représenter dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *chacune des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

2) $g(x) = x^3 - 3x + 1$

3) $h(x) = \sqrt{x-1}$

4) $i(x) = -x^2 + 4x + 2$

1.2 Applications

Définition 1.2.0.1 *

Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une fonction.
La fonction f est dite application si et seulement si son ensemble de départ est son ensemble de définition ; c'est à dire : $\left(D_f = A\right)$.

Exemple(s) 1.2.0.1 *

1) Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui est différent de l'ensemble de départ.
Donc elle n'est pas une application.

2) Soit $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

Le domaine de définition de la fonction g est $D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, est égal à l'ensemble de départ. Donc g est une application.

3) Soit $h: \begin{array}{rcl} [0\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$

$$\begin{array}{rcl} h(x) \text{ existe} & \Leftrightarrow & x+1 \geq \text{ et } x \in [0\ ;\ +\infty[\\ & \Leftrightarrow & x \in [-1\ ;\ +\infty[\cap[0\ ;\ +\infty[\\ & \Leftrightarrow & x \in [0\ ;\ +\infty[\end{array}$$

Donc $D_h = [0\ ;\ +\infty[$. *Par conséquent* h *est une application.*

Exercices 1.2.0.1 *Déterminer si les fonctions suivantes sont des applications.*

1) $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+1 \end{array}$

2) $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{array}$

3) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x^2+x+1} \end{array}$

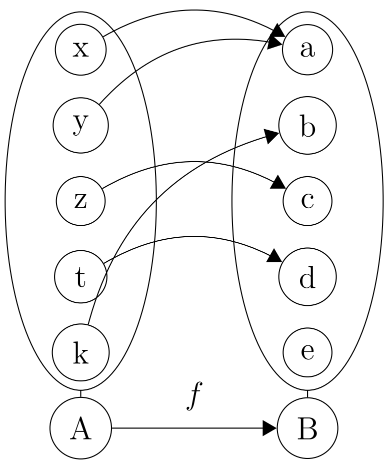
4) $h: \begin{array}{rcl} [1\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{array}$

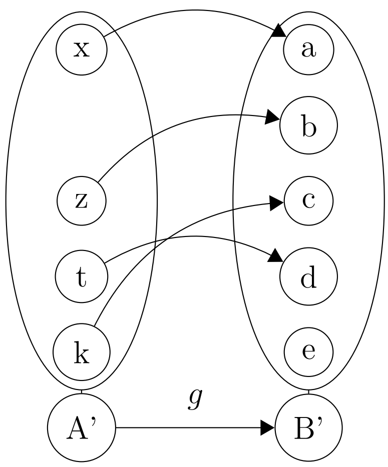
1.2.1 Application injective ou Injection

Définition 1.2.1.1 *

Soit A *et* B *deux ensembles et* $f\ :\ A \to B$ *une application.*
f *est dite injective si tout élément de* B *admet au plus un antécédent dans* A.

Illustration graphique :





- Les fonctions f et g sont des applications car tout élément de leurs ensemble de départ admet une image dans leurs ensemble d'arrivée.
- L'application f n'est pas injective ; car il existe un élément de B admettant deux antécédents dans A.
- L'application g surjective ; car Il n'existe pas d'élément B' admettant plus d'un antécédent dans A'.

Propriété 1.2.1.1 *

Soit A et B deux ensembles et $f\ :\ A \to B$ une application.
Si f est une application injective, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\forall$ *a et b* $\in A,\quad f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\forall$ *a et b* $\in A,\quad a \neq b \Leftrightarrow f(a) \neq f(b)$
- $\forall\ y\ \in\ B,\quad f(x) = y$ *admet au plus une solution dans A*

Remarque(s) 1.2.1.1 *

Pour montrer qu'une fonction $f\ :\ A \to B$ est injective, on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

> *Montrer que pour tous réels a et b* $\in A,\quad f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.
> *Montrer que pour tous réels a et b* $\in A,\quad a \neq b \Leftrightarrow f(a) \neq f(b)$.
> *Montrer que pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans A.*

Exemple(s) 1.2.1.1 *Déterminons si les applications suivantes sont injectives ou non.*

1) Soit $\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x-1} \end{array}$.

Soient a et b $\in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ *tels que :* $g(a) = g(b)$.
On a :

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\Leftrightarrow \frac{a+2}{a-1} = \frac{b+2}{b-1} \\ &\Leftrightarrow (a+2)(b-1) = (a-1)(b+2) \\ &\Leftrightarrow ab - a + 2b - 2 = ab + 2a - b - 2 \\ &\Leftrightarrow 3a = 3b \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Donc : $\forall$ *a et b* $\in \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad g(a) = g(b) \Leftrightarrow a = b$.
D'où g est injective.

2) *Soit* $f: \begin{array}{rcl} [1\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-2x+2 \end{array}.$

Soit $y \in \mathbb{R}$, *déterminons suivant les valeurs de* y *le nombre de solution dans* $[1\ ;\ +\infty[$ *de l'équation* $f(x) = y$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Rightarrow & x^2 - 2x + 2 = y \\ & \Rightarrow & x^2 - 2x + 2 - y = 0 \\ & & \Delta = 4(y-1) \end{array}$$

Étudions le signe de Δ.

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$\Delta = 4(y-1)$	$-$ 0 $+$

- *Pour* $y \in]-\infty\ ;\ 1[$, $f(x) = y$ *n'a pas de solution.*
- *Pour* $y = 1$, $f(x) = y$ *admet une seule solution* $x_0 = 1 \in [1\ ;\ +\infty[$.
- *Pour* $y \in]1\ ;\ +\infty[$, $f(x) = y$ *admet deux solutions distinctes* $x_1 = 1 - \sqrt{y-1}$ *et* $x_2 = 1 + \sqrt{y-1}$ *dont l'une seule est dans* $[1\ ;\ +\infty[$.

Donc $\forall\ y\ \in\ \mathbb{R}$, $f(x) = y$ *admet au plus une solution dans* $[1\ ;\ +\infty[$.
Par conséquent, f *est injective.*

3) *Soit* $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-2x+2 \end{array}.$

Soit $y \in \mathbb{R}$, *déterminons suivant les valeurs de* y *le nombre de solution dans* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $f(x) = y$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Rightarrow & x^2 - 3x + 2 = y \\ & \Rightarrow & x^2 - 3x + 2 - y = 0 \\ & & \Delta = 1 + 4y \end{array}$$

Étudions le signe de Δ.

x	$-\infty$ $-\frac{1}{4}$ $+\infty$
$\Delta = 1 + 4y$	$-$ 0 $+$

Pour $y_0 \in]-\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty[$, $f(x) = y_0$ *admet deux solutions distinctes* x_1 *et* x_2.
Donc h *n'est pas injective.*

Remarque(s) 1.2.1.2 *

Pour montrer qu'une fonction $f\ :\ A \to B$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments x_1 et x_2 de A vérifiant :

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Exemple(s) 1.2.1.2 *Soit* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

On remarque que $1 \neq -1$ *et* $f(1) = f(-1)$.
Donc f *n'est pas injective.*

Exercices 1.2.1.1 *Déterminer si les applications suivantes sont injectives ou non.*

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+1 \end{array}$

2) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-1 \end{array}$

3) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{x} \end{array}$

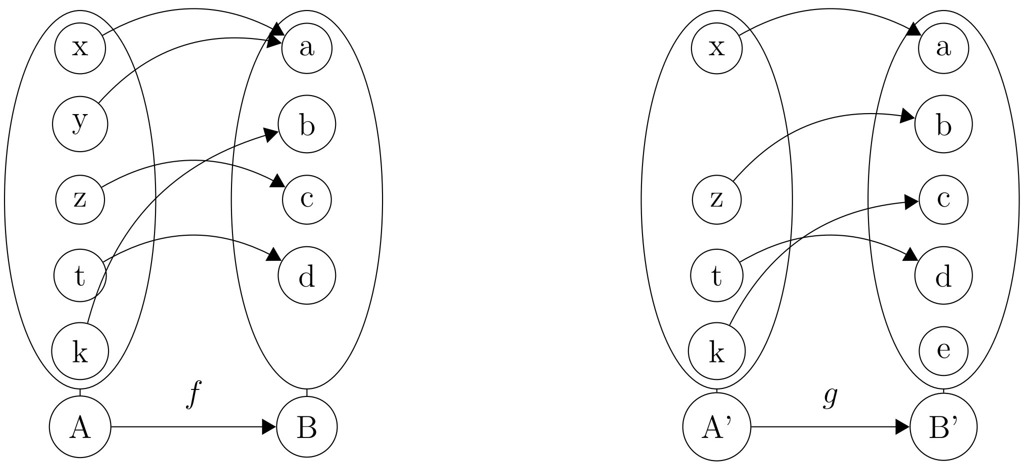
4) $i: \begin{array}{ccc} [1\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{array}$

1.2.2 Application surjective ou surjection

Définition 1.2.2.1 *

Soit A et B deux ensembles et $f\ :\ A \to B$ une application.
f est dite surjective si tout élément de B admet au moins un antécédent dans A.

Illustration graphique



> Les fonctions f et g sont des applications car tout élément de leurs ensemble de départ admet une image dans leurs ensemble d'arrivée.

> L'application f est surjective ; car tout élément de B admet au moins un antécédent dans A.

> L'application g n'est pas surjective ; car il existe un élément de B' n'admettant pas d'antécédent dans A'.

Propriété 1.2.2.1 *

Soit A et B deux ensembles et $f\ :\ A \to B$ une application.
f est surjective si et seulement si :

$$\forall\ y\ \in B,\quad f(x) = y \text{ admet au moins une solution dans } A.$$

Remarque(s) 1.2.2.1 *

Pour montrer qu'une application $f\ :\ A \to B$ est surjective, on peut exhiber un réel quelconque $y \in B$ et montrer que l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans A.

Exemple(s) 1.2.2.1 *Déterminons si les applications suivantes sont surjectives ou non.*

1) Soit $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x-1} \end{array}.$

Déterminons si pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $g(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
On a :

$$\begin{aligned} g(x) = y \quad &\Rightarrow \quad \frac{x+2}{x-1} = y \\ &\Rightarrow \quad x + 2 = (x-1)y \\ &\Rightarrow \quad x + 2 = xy - y \\ &\Rightarrow \quad x - xy = -2 - y \\ &\Rightarrow \quad x(1-y) = -2 - y. \end{aligned}$$

Pour $y = 1$, on a : $0 = -3$ ce qui est impossible.
Donc $g(x) = 1$ n'a pas de solution.
Par conséquent, g n'est pas surjective.

2) Soit $f: \begin{array}{ccc} [1\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-2x+2 \end{array}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$*, résolvons dans* $[1\ ;\ +\infty[$ *de l'équation* $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = y \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 2 - y = 0 \\ & \Delta = 4(y-1) \end{aligned}$$

Étudions le signe de Δ.

y	$-\infty$ 1 $+\infty$
$\Delta = 4(y-1)$	$-$ $\overset{0}{\mid}$ $+$

Pour $y \in]-\infty\ ;\ 1[$*,* $f(x) = y$ *n'a pas de solution (*$\Delta < 0$*).*
Donc, f *n'est pas surjective.*

3) Soit $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^2-2x+2 \end{array}$.

Soit $y \in [-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty[$*, déterminons si l'équation* $h(x) = y$ *admet au moins une solution.*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = y \\ &\Rightarrow x^2 - 3x + 2 - y = 0 \\ & \Delta = 1 + 4y \end{aligned}$$

Étudions le signe de Δ.

y	$-\infty$ $-\frac{1}{4}$ $+\infty$
$\Delta = 1 + 4y$	$-$ $\overset{0}{\mid}$ $+$

Pour tout $y \in [-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty[$*,* $\Delta \geq 0$.
Donc pour tout $y \in [-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty[$*, l'équation* $h(x) = y$ *admet au moins une solution dans* $\mathbb{R}$*.*
Par conséquent h *est surjective.*

Remarque(s) 1.2.2.2 *

Pour montrer qu'une application $f : A \to B$ n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément y_0 de B tel que l'équation : $f(x) = y_0$ n'admet pas de solution dans A.

Exemple(s) 1.2.2.2 *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.
On remarque que l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc f n'est pas surjective.

Exercices 1.2.2.1 *Déterminer si les applications suivantes sont surjectives ou non.*

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x + 1 \end{array}$

2) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x - 1 \end{array}$

3) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{x} \end{array}$

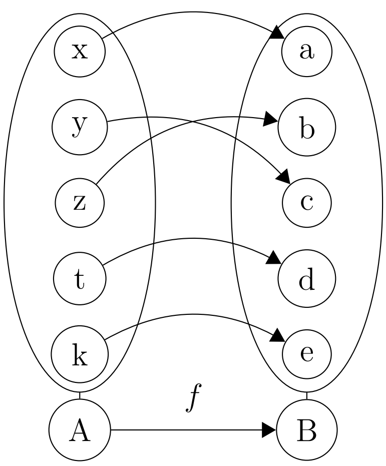
4) $i : \begin{array}{ccc} [1 \,;\, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{array}$

1.2.3 Application bijective ou bijection

Définition 1.2.3.1 *

Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application.
f est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.
C'est-à-dire, si tout élément de B admet un et un seul antécédent dans A.

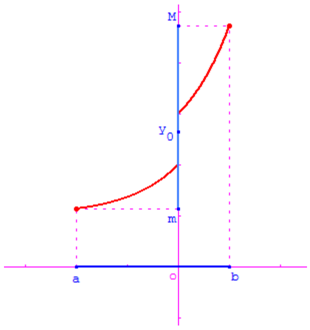
Illustration schématique



- La fonction f est une application car tout élément de A admet une image dans B.
- L'application f est bijective car tout élément de B admet un et un seul antécédent dans A.

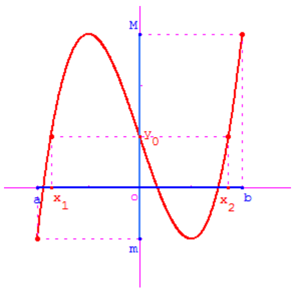
Reconnaissance d'une courbe représentant une bijection

1) La courbe ci-dessous représente une application $f\ :\ [a\ ;\ b] \to [m\ ;\ M]$ avec $[a\ ;\ b]$ et $[m\ ;\ M]$ des intervalles.



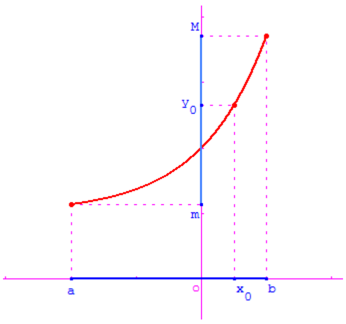
On voit qu'il existe un élément y_0 de $[m\ ;\ M]$ qui n'admet pas d'antécédent dans $[a\ ;\ b]$.
Donc f n'est pas surjective, par conséquent elle n'est pas bijective.

2) La courbe ci-dessous représente une application $g : [a\ ;\ b] \to [m\ ;\ M]$.



On voit qu'il existe d es élément de $[m\ ;\ M]$ qui admettent plusieurs antécédents dans $[a\ ;\ b]$.
Donc g n'est pas injective, par conséquent elle n'est pas bijective.

3) La courbe ci-dessous représente une application $h : [a\ ;\ b] \to [m\ ;\ M]$



On voit que tout élément y_0 de $[m\ ;\ M]$ admet un et un seul antécédent x_0 dans $[a\ ;\ b]$.
Donc h est une application bijective.

Propriété 1.2.3.1 *

Une application $f : A \to B$ est bijective si et seulement si : pour tout y dans B, il existe un unique x dans A tel que $f(x) = y$.

$\mathcal{R}$**emarque(s) 1.2.3.1** *

Pour montrer qu'une application $f : A \to B$ est bijective, on peut exhiber un réel quelconque $y \in B$ et montrer que l'équation $f(x) = y$ admet une et une seule solution dans A.

$\mathbb{E}$**xemple(s) 1.2.3.1** *Montrons que les applications suivantes sont bijectives.*

1) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x-1} \end{array}$.

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Résolvons l'équation $g(x) = y$.

$$\begin{aligned} g(x) = y &\Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = y \\ &\Rightarrow x + 2 = (x-1)y \\ &\Rightarrow x + 2 = xy - y \\ &\Rightarrow x - xy = -2 - y \\ &\Rightarrow x(1-y) = -2 - y \\ &\Rightarrow x = \frac{-2-y}{1-y} \ \textit{car } y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}. \end{aligned}$$

Montrons que $x = \dfrac{-2-y}{1-y} \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Pour cela, on suppose que $x = \dfrac{-2-y}{1-y} \notin \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned} x \notin \mathbb{R}\setminus\{1\} &\Rightarrow x = 1 \\ &\Rightarrow \frac{-2-y}{1-y} = 1 \\ &\Rightarrow -2 - y = 1 - y \\ &\Rightarrow 0 = 3 \ \textit{impossible} \end{aligned}$$

Donc $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
Donc g est une application bijective.

2) $f: \begin{array}{ccc}]1\ ;\ +\infty[& \to &]1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^2-2x+2 \end{array}$.

Soit $y \in]1\ ;\ +\infty[$, *résolvons dans* $]1\ ;\ +\infty[$ *de l'équation* $f(x)=y$.

$$\begin{array}{rcl} f(x)=y & \Rightarrow & x^2-2x+2=y \\ & \Rightarrow & x^2-2x+2-y=0 \\ & & \Delta = 4(y-1) \end{array}$$

Étudions le signe de Δ.

y	$-\infty$	1	$+\infty$
$\Delta = 4(y-1)$	$-$	0	$+$

Pour $y \in]1\ ;\ +\infty[$, Δ *est strictement positif, donc* $f(x)=y$ *admet deux solutions distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que :*

$$x_1 = 1-\sqrt{y-1} \quad \textit{et} \quad x_2 = 1+\sqrt{y-1}.$$

Or : $x_1 \notin]1\ ;\ +\infty[$ *et* $x_2 \in]1\ ;\ +\infty[$.
Donc pour tout $y \in]1\ ;\ +\infty[$, *il existe un unique* $x \in]1\ ;\ +\infty[$ *tel que* $f(x)=y$.
Par conséquent f *est bijective.*

Remarque(s) 1.2.3.2 *

Pour montrer qu'une application $f\ :\ A \to B$ *n'est pas bijective, il suffit de montrer qu'elle n'est pas injective ou qu'elle n'est pas surjective.*

Exemple(s) 1.2.3.2 *Soit* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

On remarque que l'équation $f(x)=-1$ *n'a pas de solution dans* $\mathbb{R}$.
Donc f *n'est pas surjective, par conséquent elle n'est pas bijective.*

On pouvait aussi montrer que f *n'est injective.*
En effet, $1 \neq -1$ *et* $f(1)=f(-1)$.

Exercices 1.2.3.1 *Déterminer si les applications suivantes sont bijectives ou non.*

1) $\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$

2) $\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x-2 \end{array}$

3) $\begin{array}{rrcl} h: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x}{x-1} \end{array}$

4) $\begin{array}{rrcl} i: & [1\ ;\ +\infty[& \to & [1\ ;\ +\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{x-1}+1 \end{array}$

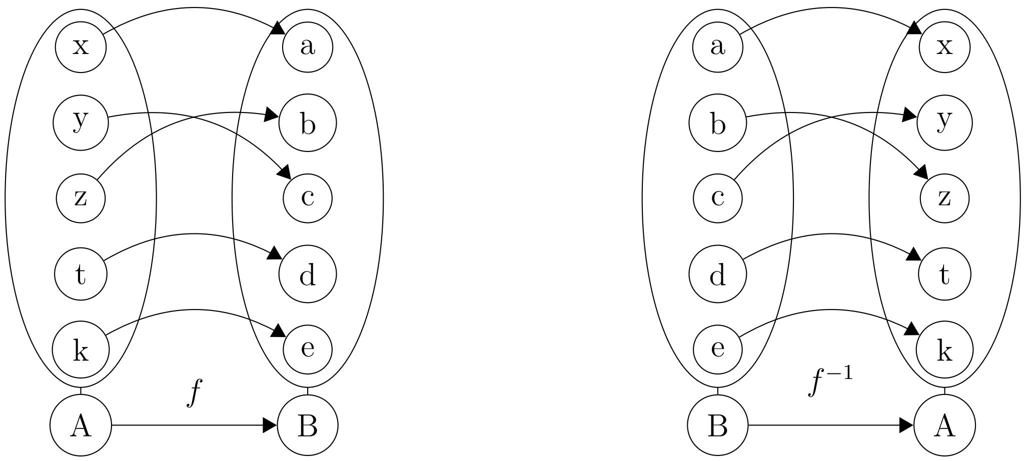
Bijection réciproque d'une application bijective

Définition 1.2.3.2 *

Soit $f\ :\ A \to B$ une application bijective.
L'application de $B \to A$ qui à tout $y \in B$ associe le nombre $x \in A$, tel que $f(x) = y$, est appelée bijection réciproque de f. On la note : f^{-1}.
On a :

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & B & \to & A \\ & y & \mapsto & x \setminus f(x) = y \end{array}$$

Illustration schématique :



Remarque(s) 1.2.3.3 *Pour déterminer l'expression de bijection réciproque d'une application* $\begin{array}{rrcl} f: & B & \to & A \\ & y & \mapsto & f(x) \end{array}$ *, on résout dans A l'équation $f(x) = y$ avec y un élément de B.*

Exemple(s) 1.2.3.3 *On considère l'application :* $\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{3x+1}{x-1} \end{array}$.
Montrons que g est une application bijective et en déduisons l'expression de sa bijection réciproque.

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$. Résolvons l'équation $g(x) = y$.

$$\begin{aligned}
g(x) = y \quad &\Rightarrow \quad \frac{3x+1}{x-1} = y \\
&\Rightarrow \quad 3x + 1 = (x-1)y \\
&\Rightarrow \quad 3x + 1 = xy - y \\
&\Rightarrow \quad 3x - xy = -1 - y \\
&\Rightarrow \quad x(3-y) = -1 - y \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{-1-y}{3-y} \quad \textit{car } y \ \in \ \mathbb{R} \setminus \{3\} .
\end{aligned}$$

Montrons que $x = \dfrac{-1-y}{3-y} \in \ \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Pour cela, on suppose que $x = \dfrac{-2-y}{1-y} \notin \ \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
x \notin \ \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad &\Rightarrow \quad x = 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{-1-y}{3-y} = 1 \\
&\Rightarrow \quad -1 - y = 3 - y \\
&\Rightarrow \quad -1 = 3 \ \textit{impossible}
\end{aligned}$$

Donc $x = \dfrac{-2-y}{1-y} \in \ \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Alors, pour tout $y \ \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$*, il existe un unique* $x = \dfrac{-2-y}{1-y} \in \ \mathbb{R}$ *tel que* $g(x) = y$.
Donc g *est une application bijective.*

La bijection réciproque de g *est l'application :*

$$\begin{aligned}
g^{-1} : \ \mathbb{R} \setminus \{3\} \ &\to \ \mathbb{R} \setminus \{1\} \\
y \ &\mapsto \ \frac{-1-y}{3-y}
\end{aligned}$$

Exercices 1.2.3.2 *Montrer que les applications suivantes sont bijectives puis déterminer leurs bijections réciproques.*

1) $f: \begin{array}{rcl}]-\infty\ ;\ 0[& \to &]1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$

2) $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x-1 \end{array}$

3) $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x} \end{array}$

4) $i: \begin{array}{rcl} [0\ ;\ +\infty[& \to & [1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$

Représentation graphique de la réciproque d'une fonction bijective

Propriété 1.2.3.2 *

Le plan est muni d'un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
Soit f une application bijective de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
La courbe $\mathcal{C}_f^{-1}$ de la bijection réciproque de f est l'image de la courbe de f par la symétrie orthogonale d'axe $(y=x)$.

C'est à dire que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_f^{-1}$ sont symétrique par rapport à la première bissectrice.

Méthode :

Pour tracer $\mathcal{C}_f^{-1}$ à l'aide de $\mathcal{C}_f$, on trace d'abord la courbe de f dans un repère.
Ensuite, on trace la droite d'équation : $y=x$.
Et enfin, on construit l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe $(y=x)$.

Exemple(s) 1.2.3.4 *On considère l'application* $f: \begin{array}{rcl} [0\ ;\ 4] & \to & [0\ ;\ 2] \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$, *de courbe* $\mathcal{C}_f$ *dans un repère* $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. *Montrer que f admet une bijection réciproque.*
2. *Représenter $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_f^{-1}$ dans le repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.*

Correction :

1. *Montrons que f admet une bijection réciproque. Soit $y \in [0\ ;\ 2]$.*
   On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x)=y & \Rightarrow & \sqrt{x}=y \\ & \Rightarrow & x=y^2. \end{array}$$

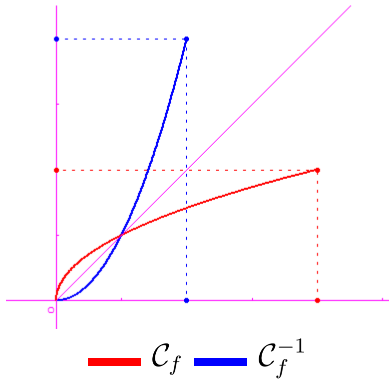
   Or :

$$\begin{array}{rcl} y\in[0\ ;\ 2] & \Rightarrow & 0\le y\le 2 \\ & \Rightarrow & 0\le y^2\le 4 \\ & \Rightarrow & 0\le x\le 4 \\ & \Rightarrow & x\in[0\ ;\ 4] \end{array}$$

   Alors, pour tout $y\in[0\ ;\ 2]$, il existe un unique $x=y^2\in[0\ ;\ 4]$ tel que : $f(x)=y$.
   Donc f est bijective et sa bijection réciproque est l'application :

$$f^{-1}: \begin{array}{rcl} [0\ ;\ 2] & \to & [0\ ;\ 4] \\ y & \mapsto & y^2 \end{array}$$

2. Représentons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_f^{-1}$ dans le repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.



Exercices 1.2.3.3 *Montrer que les applications suivantes sont bijectives puis déterminer leurs bijections réciproques.*

1) $f: \begin{array}{ccc} [0\ ;\ +\infty[& \to & [1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$

2) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-1 \end{array}$

3) $h: \begin{array}{ccc} [-1\ ;\ +\infty[& \to & [0\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

4) $i: \begin{array}{ccc} [0\ ;\ +\infty[& \to & [1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$

Détermination de l'image réciproque d'un réel y_0 par une application bijective

Définition 1.2.3.3 *

Soit $f\ :\ A \to B$ une application bijective et y_0 unélément de B.
On appelle image réciproque de y_0 par f l'unique réel x_0 de A tel que $f(x_0) = y_0$.
On la note : $f^{-1}(y_0)$.

Propriété 1.2.3.3 *

Soit $f\ :\ A \to B$ une application bijective.
On a :

> *Pour tout $x\ \in\ A,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$*

> *Pour tout $x\ \in\ A,\ f^{-1} \circ f(x) = x$*

> *Pour tout $y\ \in\ B,\ f \circ f^{-1}(y) = y$*

Remarque(s) 1.2.3.4 *

Soit $f\ :\ A \longrightarrow B$ une application bijective et y_0 un élément de B.
On peut déterminer $f^{-1}(y_0)$ sans connaitre l'expression de f^{-1}, en résolvant l'équation $f(x) = y_0$.

En effet : $f(x) = y_0 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y_0)$.
Donc $f^{-1}(y_0)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y_0$.

Exemple(s) 1.2.3.5 *Soit* $f :\ \begin{array}{ccc} [0\ ;\ +\infty[& \to & [-1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+3x} \end{array}$. *Déterminons* $f^{-1}(2)$.
Résolvons dans $[0\ ;\ +\infty[$, *l'équation :* $f(x) = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Rightarrow \sqrt{x^2+3x} = 2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2+3x & \geq & 0 \\ x^2+3x & = & 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \in\ ]-\infty\ ;\ -3] \cup [0\ ,\ +\infty[\\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \in\ ]-\infty\ ;\ -3] \cup [0\ ,\ +\infty[\\ x = 1 \text{ ou } x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

$1 \in\ [0\ ;\ +\infty[$ *et* $-4 \notin\ [0\ ;\ +\infty[$. *Donc* $\mathcal{S} = \{1\}$. *D'où* $f^{-1}(2) = 1$.

Exercices 1.2.3.4 *Pour chacune des bijections suivantes, calculer l'image réciproque de α.*

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\ ;\ 0[& \to &]1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$
$\alpha = 2$

$$g: \begin{array}{rcl} [0\ ;\ +\infty[& \to & [1\ ;\ +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$$
$\alpha = 3$

Application identité

Définition 1.2.3.4 *

Soit A un ensemble. On appelle identité dans A l'application de $A \to A$ qui à tout $x \in A$ associe x lui même. On la note Id_A.

$$Id_A: \begin{array}{rcl} A & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Exemple(s) 1.2.3.6 *La fonction identité dans $\mathbb{R}$ est la fonction :* $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$.
On peut la noter simplement par : $f(x) = x$

Propriété 1.2.3.4 *

Soit $f\ :\ A \to B$ une application bijective. On a :

- $f^{-1} \circ f = Id_A$
- $f \circ f^{-1} = Id_B$

Définition 1.2.3.5 *

Soit $f:\ A \to A$ une application bijective. f est appelée involution ou application involutive si on a :

$$f \circ f = Id_A$$

Remarque(s) 1.2.3.5 *
Une application f est involutive si et seulement si $f = f^{-1}$.

Exemple(s) 1.2.3.7 *

L'application : $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ *est involutive.*
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f \circ f(x) = x$.

1.3 Exercices

$\mathbb{E}$xercices 1