EXTRAIT DU CHAPITRE GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Cet extrait est gratuit, vous pouvez l'utiliser et le partager avec les collègues et élèves.

La série d'exercices est intégralement corrigée dans le livre.

Veuillez nous contacter.

Merci !

Bismillahi-Rahmaani-Rahiim

Sois quelqu'un qui cache ses maux et ses privations, toi qui est à la recherche du savoir. Et tu auras ce que tu voudras, et tu sera élevé au dessus de tes semblables.

Ne te lamentes pas beaucoup et sois fort jusqu'à ce que les gens pensent que tu ne manques de rien.

Saches que le savoir ne sera pas donné à quelqu'un qui ne peut résister aux épreuves. En vérité, Dieu est avec les endurants.

Aies de la volonté sur l'apprentissage de tes leçons. Je suis étonné par celui qui se laisse malmener par la faim.

N'aies pas besoin d'argent ou de biens matériels. Car Dieu se charge des besoins futurs de l'apprenant.

Suis Dieu dans sa religion et avec volonté. Car la connaissance n'est jamais donnée à un mécréant.

Évites les femmes et les jeunes files et préserves-toi d'elles. Sinon, malheur à toi et tu n'auras pas la félicité.

Ne troques pas la vie de ce monde contre la vie éternelle. Car celui qui échange de la lumière contre des ténèbres le regrettera.

Cheikh Ahmadou Bamba

Avant-propos

Le livre, APPRENDRE LES MATHS TOUT SEUL 1 S, est conçu essentiellement comme un instrument de travail pour les élèves des classes de premières des séries scientifiques S_1 et S_2, en vue de les préparer aux ultérieurs concours et l'examen final à travers une formation solide en mathématiques basée sur les programmes en vigueur des classes de premières S_1 et S_2.
Toutefois, il faut notifier que le livre ne traite que les parties algèbre et analyse. La partie géométrique et les autres chapitres desdits programmes feront l'objet d'un autre tome.

La présentation s'inspire de la façon naturellement simple dont les cours sont donnés en classe ; la clarté , les couleurs et l'esthétique ont été l'objet d'une grande attention de notre part.
La hiérarchisation des connaissances a été bien accentuée pour permettre à l'élève d'assimiler plus rapidement les notions en commençant d'abord par les plus simples.
Les propriétés, théorèmes et méthodes, rigoureusement rédigés dans un style très simple, sont encadrés en couleur légèrement différenciée par leurs fonds. Les exemples sont corrigés et détaillés de façon à ce qu'ils soient compréhensibles aux élèves.

La partie réservée pour le travail personnel de l'élève est largement développée ; après chaque passage clé, des exercices sont proposés pour entrainer l'élève à la recherche suivant ses aptitudes.
Les chapitres sont clos par des séries d'exercices dont une partie du livre est entièrement consacrée à leurs corrections.

Le développement personnel, moral et émotionnel de l'élève, ainsi que la diversité culturelle et linguistique occupent une partie importante du livre ; au début de chaque chapitre on introduit une phrase ou une citation sur la motivation, la moralité ou sur le développement personnel. Sur le plan culturel, nous avons choisi de débuter le livre par le célèbre poème KUN KAATIMAN, traduit en français, de Cheikh Ahmadou Bamba.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des professeurs et des élèves. Toutes suggestions, remarques et critiques seront accueillies avec reconnaissance afin d'améliorer les prochaines éditions.
Merci d'avance.

Moustapha Ndiaye

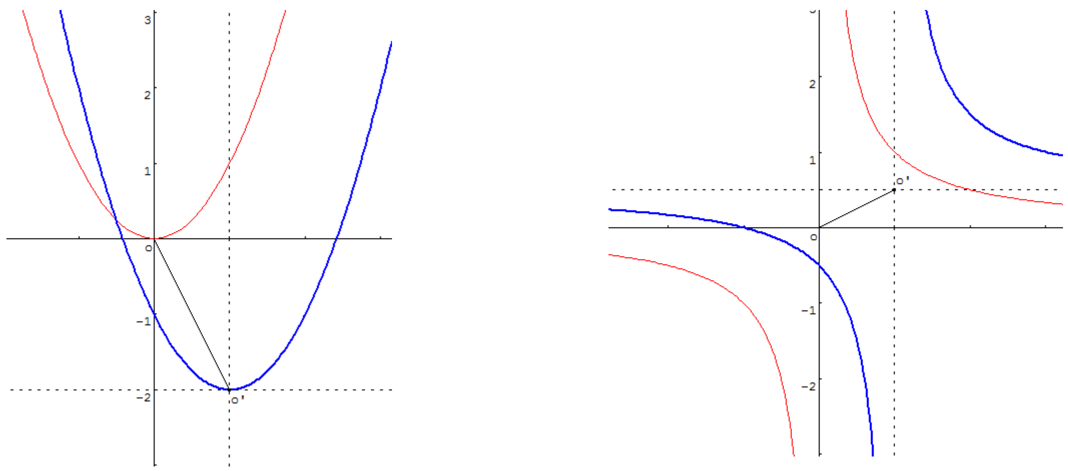
Table des matières

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions numériques

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous apporterons des compléments à la notion de fonction déjà introduite dans le chapitre précédent.



$\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$

OBJECTIFS

> *Démontrer qu'une fonction est croissante ou décroissante sur un ensemble I.*

> *Comparer deux fonctions.*

> *Reconnaitre et/ ou déterminer un majorant ou un minorant d'une fonction donnée.*

> *Déterminer les extrémums d'une fonction.*

> *Justifier la parité d'une fonction et la périodicité.*

> *Démontrer qu'un point est centre de symétrie de la courbe d'une fonction donnée.*

> *Démontrer qu'une droite est axe de symétrie de la courbe d'une fonction donnée.*

> *Déterminer graphiquement l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.*

> *Construire à partir de la courbe d'une fonction les courbes des fonctions qui lui sont associées.*

1.1 Restriction d'une fonction

Définition 1.1.0.1 *

Soit f une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B et I un sous-ensemble de A. On appelle restriction de de f sur I la fonction g de I vers B définie par :

$$g : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x) = g(f(x) \end{array}.$$

On note : $g = f_{/I}$.

NB : La fonction f est appelée prolongement de g à A.

Exemple(s) 1.1.0.1 *Soit* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x-1| \end{array}$.
Déterminer la restrictions g de f sur $]-\infty \ ; \ 1[$.

Correction :

La fonction g est définie par : $g : \begin{array}{rcl}]-\infty \ ; \ 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x-1| \end{array}$.
Or, $|x-1| = -x+1$ *pour tout* $x \in]-\infty \ ; \ 1[$.

Donc la fonction g est définie par : $g : \begin{array}{rcl}]-\infty \ ; \ 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x+1 \end{array}$.

Exercices 1.1.0.1 *Pour chacune des fonction suivantes, donner sa restriction sur I.*
1) $f(x) = |x^2-1| \ ; \ I = [-1 \ ; \ 1]$ *2)* $g(x) = \dfrac{x^2}{|x|} \ ; \ I =]-\infty \ ; \ 0]$
3) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{|x+1|} \ ; \ I =]-\infty \ ; \ -1]$.

1.2 Ensemble de définition de la composée de deux fonctions

Propriété 1.2.0.1 *

Soit f et g deux fonctions de domaines de définition respectifs D_f et D_g. Pour tout réel x,

$$g \circ f(x) \text{ existe si et seulement si } x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$$

Exemple(s) 1.2.0.1 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *et* $g(x) = \sqrt{2-x}$.

1. *Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g.*
2. *En déduire le domaine de définition de la composée $g \circ f$.*
3. *Déterminer l'expression de $g \circ f$.*

Correction :

1. *Déterminons les ensembles de définition des fonctions f et g.*
   - $f(x)$ *existe si et seulement si* $x \neq 0$ *; donc* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$
   - $g(x)$ *existe si et seulement si* $2 - x \geq 0$ *; donc* $D_g =]-\infty \ ; \ 2]$. $\boxed{D_g =]-\infty \ ; \ 2]}$
2. *En déduisons D_{gof} le domaine de définition de la composée $g \circ f$.*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x)$ existe si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
   - $x \in D_f \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   - $f(x) \in D_g \Rightarrow \dfrac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{1-2x}{x} \leq 0 \Rightarrow x \in]-\infty \ ; \ 0[\cup \left[\dfrac{1}{2} \ ; \ +\infty\right[$

   Donc : $D_{gof} = \left( ]-\infty \ ; \ 0[\cup \left[\dfrac{1}{2} \ ; \ +\infty\right[\right) \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty \ ; \ 0[\cup \left[\dfrac{1}{2} \ ; \ +\infty\right[$

   $$\boxed{D_{gof} =]-\infty \ ; \ 0[\cup \left[\frac{1}{2} \ ; \ +\infty\right[}$$
3. *Déterminer les expressions de $gof(x)$.*

   On a : $gof(x) = g[f(x)] = \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x}}$.

   $$\boxed{gof(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x}}}$$

Exercices 1.2.0.1 *Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de $g \circ f$ et de $f \circ g$.*
1) $f(x) = \sqrt{x-1}$ *et* $g(x) = x^2 - x + 2$ *2)* $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ *et* $g(x) = 1 - \sqrt{x}$.

1.3 Variations d'une fonction

1.3.1 Fonctions croissante, décroissante, constante

Définition 1.3.1.1 *

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

> *La fonction f est dite croissante sur I, si et seulement si, pour tous réels, x_1, x_2 de I, on a :*
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

> *La fonction f est dite décroissante sur I, si et seulement si, pour tous réels, x_1, x_2 de I, on a :*
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

> *La fonction f est dite constante sur I, si et seulement si, pour tous réels, x_1, x_2 de I, on a :*
$$f(x_1) = f(x_2).$$

Exemple(s) 1.3.1.1 *Étudier les variations sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes.*

1. $f(x) = \dfrac{-2}{x-1}$; $I =]1\ ;\ +\infty[$
2. $g(x) = -2(x-2)^2 - 1$; $I = [2\ ;\ +\infty[$
3. $h(x) = E(x)$; $I = [1\ ;\ 2[$

Correction :

1. *Étudions les variations de f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.*
   Soient $x_1, x_2 \in]1\ ;\ +\infty[$ tels que : $x_1 \leq x_2$. On a :

$$\begin{aligned} x_1\ ,\ x_2\ \in]1\ ;\ +\infty[\text{ et } x_1 \leq x_2 &\Rightarrow 1 < x_1 \leq x_2 \\ &\Rightarrow 0 < x_1 - 1 \leq x_2 - 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{x_2-1} \leq \frac{1}{x_1-1} \\ &\Rightarrow \frac{-2}{x_2-1} \geq \frac{-2}{x_1-1} \\ &\Rightarrow \frac{-2}{x_1-1} \leq \frac{-2}{x_2-1} \\ &\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tous $x_1, x_2 \in]1\ ;\ +\infty[$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Donc f est croissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.

2. *Étudions les variations de g sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.*
   Soient $x_1, x_2 \in [2\ ;\ +\infty[$ tel que : $x_1 \leq x_2$. On a :

$$\begin{aligned} x_1\ ,\ x_2\ \in [2\ ;\ +\infty[\text{ et } x_1 \leq x_2 &\Rightarrow 2 \leq x_1 \leq x_2 \\ &\Rightarrow 0 \leq x_1 - 2 \leq x_2 - 2 \\ &\Rightarrow (x_1-2)^2 \leq (x_2-2)^2 \\ &\Rightarrow -2(x_1-2)^2 \geq -2(x_2-2)^2 \\ &\Rightarrow -2(x_1-2)^2 - 1 \geq -2(x_2-2)^2 - 1 \\ &\Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tous $x_1, x_2 \in [2\ ;\ +\infty[$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$.
   Donc g est décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

3. *Étudions les variations de h sur l'intervalle $[1\ ;\ 2[$.*
   Soient $x_1, x_2 \in [1\ ;\ 2[$. On a : $E(x_1) = E(x_2) = 1$.
   Ainsi,pour tous $x_1, x_2 \in [1\ ;\ 2[$, $h(x_1) = h(x_2)$. Donc h est constante sur $[1\ ;\ 2[$.

Exercices 1.3.1.1 *Pour chacune des fonction suivantes, étudier sa variation sur I.*

1) $f(x) = x^3 - 1$; $I = [0\ ;\ -\infty[$ *2)* $g(x) = \dfrac{-2}{x-2} + 1$; $I =]2\ ;\ +\infty[$

3) $h(x) = \sqrt{-x+1}$; $I =]-\infty\ ;\ 1]$.

Taux de variation d'une fonction entre deux points

Définition 1.3.1.2 *

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; x_1 et x_2 deux éléments distinctes de I. On appelle taux de variation de f entre x_1 et x_2 l'expression, notée $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2)$, définie par :

$$\mathcal{T}_f(x_1\ ;\ x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Propriété 1.3.1.1 *

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- *Si $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) \geq 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in I$, alors f est croissante sur I.*
- *Si $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) \leq 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in I$, alors f est décroissante sur I.*
- *Si $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) = 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in I$, alors f est constante sur I.*

Exemple(s) 1.3.1.2 *On considère la fonction $f(x) = x^3$.*

1. *Soient x_1 et x_2 deux réels, calculer $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2)$.*
2. *Étudier le signe de $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2)$ sur $]-\infty\ ;\ 0$ et sur $[0\ ;\ +\infty[$.*
3. *En déduire le sens de variation de f*

Correction :

1. *Calculons $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2)$.*
   On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x_1\ .\ x_2) &= \frac{(x_2)^3 - (x_1)^3}{x_2 - x_1}\\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)}{x_2 - x_1}\\ &= x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) = x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2}$$

2. *Étudions le signe de $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2)$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$.*
   On a :

$$\begin{aligned}x_1\ ,\ x_2 \in]-\infty\ ;\ 0] &\Rightarrow x_2x_1 \geq 0\\ &\Rightarrow x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \geq 0\\ &\Rightarrow \mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) \geq 0\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) \geq 0 \ \ \forall\ x_1, x_2 \in [0\ ;\ +\infty[$.

   Étudions le signe de $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   On a :

$$\begin{aligned}x_1, x_2 \in [0\ ;\ +\infty[&\Rightarrow x_2x_1 \geq 0\\ &\Rightarrow x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \geq 0\\ &\Rightarrow \mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) \geq 0\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{T}_f(x_1\ .\ x_2) \geq 0$ pour tous $x_1, x_2 \in [0\ ;\ +\infty[$.

3. *En déduisons le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.*

   D'après la question précédente, $\mathcal{T}_f(x_1 \,.\, x_2) \geq 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in]-\infty\ ;\ 0]\ \forall\ x_1, x_2 \in [0\ ;\ +\infty[$. Donc f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et $[0\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple(s) 1.3.1.3 *On considère la fonction $g(x) = \sqrt{x}$.*

1. *Soient x_1 et x_2 deux réels positifs, calculer $\mathcal{T}_g(x_1 \,.\, x_2)$.*
2. *En déduire le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

Correction :

1. *Calculons $\mathcal{T}_g(x_1 \,.\, x_2)$*
   On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_g(x_1 \,.\, x_2) &= \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}{\left(x_2 - x_1\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)} \\
&= \frac{\left(x_2 - x_1\right)}{\left(x_2 - x_1\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}
\end{aligned}$$

2. *En déduisons le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.*
   On a : $\mathcal{T}_g(x_1 \,.\, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in [0\ ;\ +\infty[$.
   Donc g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1.3.2 Variations de la composée de deux fonctions

Propriété 1.3.2.1 *

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur $f(I)$.

> *Si f est croissante sur I et g croissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est croissante sur I.*
> *Si f est décroissante sur I et g décroissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est croissante sur I.*
> *Si f est croissante sur I et g décroissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.*
> *Si f est décroissante sur I et g croissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.*

En effet,

- Supposons que f est croissante sur I et g croissante sur $f(I)$.
  Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que : $x_1 \leq x_2$. On a :

$$\begin{aligned}
x_1 \leq x_2 &\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{(Car } f \text{ est croissante)} \\
&\Rightarrow g[f(x_1)] \leq g[f(x_2)] \quad \text{(Car } g \text{ est croissante)} \\
&\Rightarrow g \circ f(x_1) \leq g \circ f(x_2)
\end{aligned}$$

  Donc, $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g \circ f(x_1) \leq g \circ f(x_2)$. D'où $g \circ f$ est croissante sur I.
  De la même manière, on montre que si f est décroissante sur I et g décroissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est croissante sur I.

- Supposons que f est croissante sur I et g décroissante sur $f(I)$.
  Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que : $x_1 \leq x_2$. On a :

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{(Car } f \text{ est croissante)} \\ &\Rightarrow g[f(x_1)] \geq g[f(x_2)] \quad \text{(Car } g \text{ est décroissante)} \\ &\Rightarrow g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2) \end{aligned}$$

  Donc, $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2)$. D'où $g \circ f$ est décroissante sur I.
  De la même manière, on montre que si f est décroissante sur I et g croissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple(s) 1.3.2.1 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$.

1. *Déterminer le sens de variation de f sur $]1\ ;\ +\infty[$ et celui de g sur $]0\ ;\ \infty[$.*
2. *En déduire le sens de variation de $g \circ f$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.*

Correction :

1. *Déterminons le sens de variation de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.*
   Soient $x_1, x_2 \in]1\ ;\ +\infty[$ tels que : $x_1 \leq x_2$. On a :

$$\begin{aligned} x_1\ ,\ x_2\ \in]1\ ;\ +\infty[\text{ et } x_1 \leq x_2 &\Rightarrow 1 < x_1 \leq x_2 \\ &\Rightarrow 0 < x_1 - 1 \leq x_2 - 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} \geq \frac{1}{x_2 - 1} \\ &\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{aligned}$$

   Ainsi : $\forall\ x_1, x_2 \in]1\ ;\ +\infty[,\quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$. Donc f est décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.
   Déterminons le sens de variation de g sur $]0\ ;\ \infty[$.
   Soient $x_1, x_2 \in]0\ ;\ +\infty[$ tels que : $x_1 \leq x_2$. On a :

$$\begin{aligned} x_1\ ,\ x_2\ \in]0\ ;\ +\infty[&\Rightarrow x_1 \leq x_2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2} \\ &\Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tous $x_1, x_2 \in]0\ ;\ +\infty[,\quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow\ g(x_1) \geq g(x_2)$.
   Donc g est croissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.

2. *En déduisons le sens de variation de $g \circ f$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.*
   La fonction f est décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$ et la fonction g est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[= f\Big(]1\ ;\ +\infty[\Big)$. Donc la fonction $g \circ f$ est décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.

1.4 Comparaison de deux fonctions

1.4.1 Définition et propriétés

Définition 1.4.1.1 *

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

> *La fonction f est inférieure à la fonction g, $\big(f \leq g\big)$, sur I si on a :*

$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) \leq g(x).$$

> *La fonction f est supérieure à la fonction g, $\big(f \geq g\big)$, sur I si on a :*

$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) \geq g(x).$$

> *La fonction f est égale à la fonction g, $\big(f \equiv g\big)$, sur I si on a :*

$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) = g(x).$$

Remarque(s) 1.4.1.1 *

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

> *Comparer les fonctions f et g sur I consiste déterminer si : $f \leq g$; $f \geq g$ ou $f \equiv g$.*

> *Pour comparer f et g sur I, on peut étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur I.*

Exemple(s) 1.4.1.1 *Soient $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = x - 2$.*
Comparer les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$.

Correction :
Étudions le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On a : $f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 3$, $\Delta = 4$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- *Pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 1] \cup [3\ ;\ +\infty[$, $f(x) - g(x) \geq 0$. Donc $f(x) \geq g(x)$ $\ \forall\ x \in\ ]-\infty\ ;\ 1] \cup [3\ ;\ +\infty[$.*
  D'où $f \geq g$ sur $]-\infty\ ;\ 1] \cup [3\ ;\ +\infty[$.
- *Pour tout $x \in [1\ ;\ 3]$, $f(x) - g(x) \leq 0$. Donc $f(x) \leq g(x)$ $\ \forall\ x \in [1\ ;\ 3]$.*
  D'où $f \leq g$ sur $[1\ ;\ 3]$.

1.4.2 Positions relatives des courbes de deux fonctions

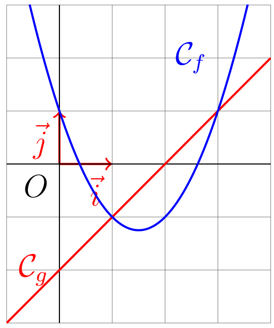
Propriété 1.4.2.1 *

Le plan est muni d'un repère $\big(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\big)$.
Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, définies sur un intervalle I.

> *Si $f \geq g$, alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.*

> *Si $f \leq g$, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.*

Exemple(s) 1.4.2.1 *Soit* $f(x) = x^2 - 3x + 1$ *et* $g(x) = x - 2$ *deux fonctions de courbes représentatives* $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *dans un repère* $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$.



Correction :
D'après l'exemple précédent, on a :

- *Sur* $]-\infty\ ;\ 1] \cup [3\ ;\ +\infty[$, $f \geq g$ *donc* $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de* $\mathcal{C}_g$.
- *Sur* $[1\ ;\ 3]$, $f \leq g$ *donc* $\mathcal{C}_f$ *est en dessous de* $\mathcal{C}_g$.

Exercices 1.4.2.1 *Dans chacun des cas ci-dessous, comparer les fonctions* f *et* g, *et en déduire les positions relatives de la courbe* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à* $\mathcal{C}_g$.
1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ *et* $g(x) = x^2 + 2$; *2)* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ *et* $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$

1.4.3 Fonction positive et fonction négative

Définition 1.4.3.1 *

Soient f *une fonction définie sur un intervalle* I.

- *La fonction* f *est positive* , $\left(f \geq 0\right)$, *sur* I *si on a :*
$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) \geq 0.$$
- *La fonction* f *est négative* , $\left(f \leq 0\right)$, *sur* I *si on a :*
$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) \leq 0.$$
- *La fonction* f *est nulle, sur* I *si on a :*
$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) = 0.$$

Exemple(s) 1.4.3.1 *

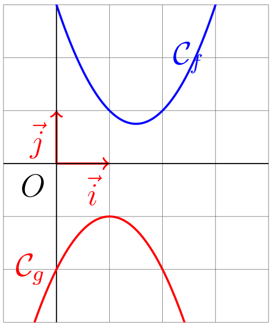
- *Soit* f *la fonction définie par :* $f(x) = x^2 + 1$.
La fonction f *est positive sur* $\mathbb{R}$, *car pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- *Soit* g *la fonction définie par :* $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
La fonction g *est strictement négative sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *car pour tout* $x \neq 0$, $g(x) < 0$.

Exercices 1.4.3.1 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est positive ou négative sur* I.
$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $I =]-\infty\ ;\ 0]$; $g(x) = 1 - \sqrt{1+x}$, $I =]0\ ;\ +\infty[$;
$h(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.

Remarque(s) 1.4.3.1 *Le plan est muni d'un repère* $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I, *de courbe représentative* $\mathcal{C}_f$.

- *La fonction* f *est positive sur* I *si et seulement si* $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de l'axe des abscisses sur* I.
- *La fonction* f *est négative sur* I *si et seulement si* $\mathcal{C}_f$ *est en dessous de l'axe des abscisses sur* I.

Par exemple : le schéma ci-contre représente les courbes d'une fonction positive et d'une fonction négative.



$\mathcal{C}_f$ *représente une fonction positive.*
$\mathcal{C}_g$ *représente une fonction négative.*

1.5 Majorant, minorant, extrémum

1.5.1 Fonction majorée, minorée, bornée

Définition 1.5.1.1 *

Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I.

- f *est dite majorée sur* I, *s'il existe un réel* M *tel que :*
$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) \leq M.$$
- f *est dite minorée sur* I, *s'il existe un réel* m *tel que :*
$$\forall\ x\ \in\ I,\ f(x) \geq m.$$
- f *est dite bornée sur* I *si elle est à la fois majorée et minorée. C'est a dire s'il existe deux réels* M *et* m *tels que :*
$$\forall\ x\ \in\ I,\ m \leq f(x) \leq M.$$

Remarque(s) 1.5.1.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I, *de courbe représentative* $\mathcal{C}_f$, m *et* M *deux nombres réels.*

> *La fonction* f *est majorée par* M *sur* I *si et seulement si* $\mathcal{C}_f$ *est en dessous de la droite d'équation* $y = M$ *sur* I.
> *La fonction* f *est minorée par* m *sur* I *si et seulement si* $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de la droite d'équation* $y = m$ *sur* I.
> *La fonction* f *est bornée par* m *et* M *sur* I *si et seulement si* $\mathcal{C}_f$ *est entre les droites d'équation* $y = m$ *et* $y = M$ *sur* I.

Exemple(s) 1.5.1.1 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

1. *Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$.*
3. *En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Correction :

1. *Montrons que f est majorée sur $\mathbb{R}$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned} x^2 \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad x^2+1 \geq 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \\ &\Longrightarrow \quad f(x) \leq 1. \quad \textit{Donc } f \textit{ est majorée sur } \mathbb{R} \textit{ par 1.} \end{aligned}$$
2. *Montrons que f est minorée sur $\mathbb{R}$.*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{1}{x^2+1} > 0$. Donc f est minorée sur $\mathbb{R}$ par 0
3. *En déduisons que f est bornée sur $\mathbb{R}$.*
   La fonction f est à la fois majorée et minorée sur $\mathbb{R}$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
   Et on a : $0 < f(x) \leq 1$.

Exercices 1.5.1.1 *Montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur I.*

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $I = [1 \ ; \ +\infty]$; $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, $I = [0 \ ; \ 1]$; $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, $I = [0 \ ; \ +\infty]$

1.5.2 Maximum et minimum d'une fonction

Définition 1.5.2.1 *

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, m et M des nombres réels.

- *M est le maximum de f sur I, si et seulement si :*
  il existe un réel $\alpha \in I$ tel que pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leq M$ et $f(\alpha) = M$.
- *m est le minimum de f sur I, si et seulement si :*
  il existe un réel $\alpha \in I$ tel que pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \geq m$ et $f(\alpha) = m$.

Méthode :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, m et M des nombres réels.

- Pour montrer que M est un maximum de f sur I, on montre d'abord que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
  Ensuite, on montre qu'il existe un réel α solution de l'équation $f(x) = M$ appartenant à I.
- Pour montrer que m est un minimum de f sur I, on montre d'abord que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.
  Ensuite, on montre qu'il existe un réel α solution de l'équation $f(x) = m$ appartenant à I.

Exemple(s) 1.5.2.1 *

1. *Soit* $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$. *Montrons que* f *admet un maximum sur* $\mathbb{R}$.

   Correction :

   Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Longrightarrow x^2+1 \geq 1 \\ &\Longrightarrow \frac{2}{x^2+1} \leq 2 \\ &\Longrightarrow f(x) \leq 2 \end{aligned}$$

   Or $f(x) = 2 \Longrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}$. *Donc* 2 *est le maximum de* f *sur* $\mathbb{R}$.

2. *Soit* $g(x) = \sqrt{x-1}$. *Montrons que* g *admet un minimum sur* $[1\ ;\ +\infty[$.

   Correction :

   Soit $x \in [1\ ;\ +\infty[$, *on a :*

$$\begin{aligned} x \in [1\ ;\ +\infty[&\Longrightarrow x \geq 1 \\ &\Longrightarrow x-1 \geq 0 \\ &\Longrightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \\ &\Longrightarrow g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

   Or $g(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \in [1\ ;\ +\infty[$. *Donc* 0 *est un minimum de* g *sur* $[1\ ;\ +\infty[$.

Exercices 1.5.2.1 *Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer si possible ses extrémums sur* I.

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $I = [1\ ;\ +\infty]$; $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, $I = [0\ ;\ 1]$;
$h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, $I = [0\ ;\ +\infty]$

1.6 Fonction paire et fonction impaire

1.6.1 Fonction paire

Définition 1.6.1.1 *

Soit f *une fonction de domaine de définition* $\mathcal{D}_f$. *La fonction* f *est dite paire si on a :*

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f & \Big(\text{Autrement dit, } \mathcal{D}_f \text{ est symetrique par rapport à } 0\Big) \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Méthode :

Pour montrer qu'une fonction f est paire, on détermine d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Ensuite, on montre que pour tout réel x, on a : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$.
Et enfin, on montre que $f(-x) = f(x$.

Exemple(s) 1.6.1.1 *Soit* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. *Montrer que* f *est paire.*

Correction :

- *Déterminons* $\mathcal{D}_f$.

  $f(x)$ *existe si et seulement si :* $1 - x^2 \geq$ *et* $x^2 \neq 0$.

  $$\left\{\begin{array}{rcl} 1-x^2 & \geq & 0 \\ x^2 & \neq & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & \in & [-1\ ;\ 1] \\ x & \neq & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \mathcal{D}_f = [-1\ ;\ 1] \setminus \{0\}$$

- *Montrons que pour tout réel* x, *on a :* $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$.

  Soit $x \in \mathcal{D}_f$, *on a :*

  $$\begin{array}{rcl} x \in \mathcal{D}_f & \Rightarrow & x \in [-1\ ;\ 1] \setminus \{0\} \\ & \Rightarrow & -1 \leq x < 0 \text{ ou } 0 < x \leq 1 \\ & \Rightarrow & 0 < -x \leq 1 \text{ ou } -1 \leq -x < 0 \\ & \Rightarrow & -x \in [-1\ ;\ 1] \setminus \{0\} \\ & \Rightarrow & -x \in \mathcal{D}_f. \text{ Donc pour tout réel } x, \text{ on a : } x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f. \end{array}$$

- *Calculons* $f(-x)$.

  $$f(-x) = \frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{(-x)^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} = f(x).$$

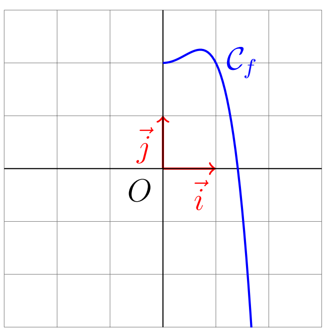
Donc on a : $\left\{\begin{array}{l} x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = f(x) \end{array}\right.$. *D'où* f *est paire.*

Comportement géométrique d'une fonction paire

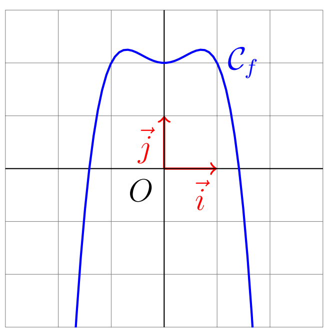
Propriété 1.6.1.1 *

Si une fonction f *est paire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Remarque(s) 1.6.1.1 *Si une fonction* f *est paire, alors on peut réduire le domaine d'étude sur* $\mathcal{D}_f \cap [0\ ;\ +\infty[$ *et y tracer une partie de la courbe, et enfin compléter le reste de la courbe par la symétrie orthogonale d'axe* $(O\ ,\ \vec{j})$.



La partie de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D}_f \cap [0\ ;\ +\infty[$.



La courbe $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D}_f$.

Exercices 1.6.1.1 *Montrer que les fonctions ci-dessous sont paires.*

$f(x) = x^4 + x^2 + 1$; $g(x) = \sqrt{1-x^2}$; $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; $i(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

1.6.2 Fonction impaire

Définition 1.6.2.1 *

Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. f est dite impaire si on a :

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f & \Big(\textit{Autrement dit, } \mathcal{D}_f \textit{ est symetrique par rapport à } 0\Big) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Méthode :

Pour montrer qu'une fonction f est impaire, on détermine d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Ensuite, on montre que pour tout réel x, on a : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$.
Et enfin, on montre que $f(-x) = -f(x)$.

Exemple(s) 1.6.2.1 *Soit $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Montrer que f est impaire.* *Correction :*

- *Déterminons $\mathcal{D}_f$.*
  $f(x)$ existe si et seulement si : $x^2 - 1 \neq 0$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$$

- *Montrons que pour tout réel x, on a : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$.*
  Soit x un réel ; supposons que $x \in \mathcal{D}_f$ et $-x \notin \mathcal{D}_f$.
  On a :

$$\begin{aligned} -x \notin \mathcal{D}_f &\Rightarrow -x \notin \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\} \\ &\Rightarrow -x = -1 \text{ ou } -x = 1 \\ &\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ &\Rightarrow x \notin \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\} \\ &\Rightarrow x \notin \mathcal{D}_f. \textit{ Ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

  Donc pour tout réel x, on a : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$.

- *Calculons $f(-x)$.*

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x).$$

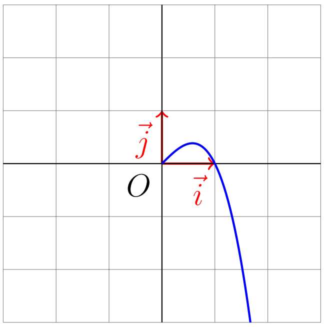
Donc on a : $\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$. *D'où f est impaire.*

Comportement géométrique d'une fonction impaire

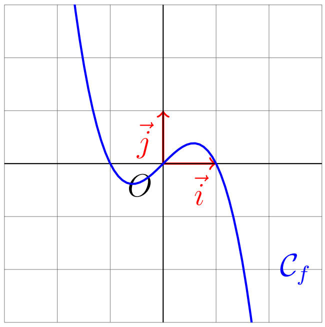
Propriété 1.6.2.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Si une fonction f est impaire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport au point O.

Remarque(s) 1.6.2.1 *Si une fonction f est impaire, alors on peut réduire le domaine d'étude sur $\mathcal{D}_f \cap [0\ ;\ +\infty[$ et y tracer une partie de la courbe, et compléter l'autre partie par la symétrie de centre O.*



La partie de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D}_f \cap [0\ ;\ +\infty[$.



La courbe $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D}_f$.

Exercices 1.6.2.1 *Montrer que les fonctions ci-dessous sont impaires.*

$f(x) = x^3 + x$; $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$; $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; $i(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Étude de la parité d'une fonction

Méthode :

Pour étudier la parité d'une fonction f, on détermine d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Si le domaine n'est pas symétrique par rapport à 0 (il existe $x_0 \in \mathcal{D}_f$ tel que $-x_0 \notin \mathcal{D}_f$) , alors la fonction n'est ni paire ni impaire.
Si le domaine est symétrique par rapport à 0 (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$), alors on calcul $f(-x)$.
Si $f(-x) = f(x)$, alors f est paire.
Si $f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.
Si $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, alors f n'est ni paire, ni impaire.

Exemple(s) 1.6.2.2 *Étudier la parité de chacune des fonctions ci-dessous.*

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
2. $g(x) = x^2 + x + 1$
3. $h(x) = \dfrac{|x|+1}{x}$

Correction :

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
   - *$f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.*
   - *$\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0 car $-1 \in \mathcal{D}_f$ et $1 \notin \mathcal{D}_f$. Donc la fonction n'est ni paire, ni impaire.*
2. $g(x) = x^2 + x + 1$
   - *g est une fonction polynôme, donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.*
   - *$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_g \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_g$.*

- *Calculons $g(-x)$.*
  On a : $g(-x) = (-x))2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1$.
  $g(-x) \neq g(x)$ et $g(-x) \neq -g(x)$, alors g n'est ni paire, ni impaire.

3. $h(x) = \dfrac{|x| + 1}{x}$

- *$h(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
- *Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x \in \mathcal{D}_h \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_h$.*
  Soit x un réel ; supposons que $x \in \mathcal{D}_h$ et $-x \notin \mathcal{D}_h$.
  On a :

$$\begin{aligned} -x \in \mathcal{D}_h &\Rightarrow -x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\Rightarrow -x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow x \notin \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\Rightarrow x \notin \mathcal{D}_h. \text{ Ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

  Donc pour tout réel x, on a : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$.
- *Calculons $h(-x)$.*
  On a : $h(-x) = \dfrac{|-x| + 1}{-x} = -\dfrac{|x| + 1}{x} = -h(x)$.
  Donc $h(-x) = -h(x)$, alors h est impaire.

Exercices 1.6.2.2 *Étudier la parité de chacune des fonctions ci-dessous.*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad ; \quad g(x) = x + \frac{1}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \quad ; \quad i(x) = x(x - 1)$$

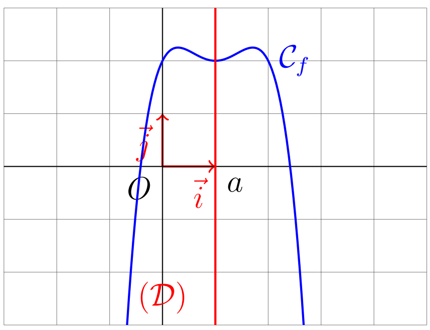
1.7 Axe et centre de symétrie d'une courbe

1.7.1 Axe de symétrie

Définition 1.7.1.1 *

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$. On dit que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe de f si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\begin{cases} 2a - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$



Méthode :

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$.
Pour montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe de f , on détermine d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Ensuite, on montre que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $2a - x \in \mathcal{D}_f$.
Et enfin, on montre que $f(2a - x) = f(x)$.
Si $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, alors la condition : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow 2a - x \in \mathcal{D}_f$, devient évidente.

$\mathbb{E}$**xemple(s) 1.7.1.1** *Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de f.*

Correction :

- *La fonction f est une fonction polynôme donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.*
- *$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 - x \in \mathcal{D}_f$.*
- *Calculons $f(2-x)$.*
  On a :

$$\begin{array}{rcl} f(2-x) & = & (2-x)^2 - 2(2-x) \\ & = & 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x \\ & = & x^2 - 2x \\ & = & f(x) \end{array}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow 2 - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2-x) = f(x) \end{cases}$.
D'où la droite $(\mathcal{D})$: $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

Remarque(s) 1.7.1.1 *

On peut aussi remplacer la définition de l'axe de symétrie par la définition suivante :
La droite $(\mathcal{D})$: $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction f si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\begin{cases} a - x \in \mathcal{D}_f \\ a + x \in \mathcal{D}_f \\ f(a-x) = f(a+x) \end{cases}$$

Remarque(s) 1.7.1.2 *

Si la droite $(\mathcal{D})$: $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $(\mathcal{D})$.
On peut alors étudier la fonction f sur $\mathcal{D}_f \cap [a\ ;\ +\infty[$ et compléter la courbe par symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Exercices 1.7.1.1 *Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer si la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $x = a$ est un axe de symétrie ou non de sa courbe représentative.*

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 3}$, $a = 2$

2) $g(x) = x^2 + 4x + 3$, $a = -2$

3) $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $a = 1$

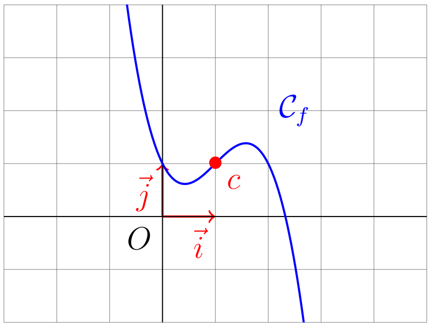
4) $i(x) = x^2 + x - 1$, $a = 3$

1.7.2 Centre de symétrie

Définition 1.7.2.1 *

Le plan est muni d'un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
Soit f une fonction ; $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que le point c $(a : b)$ est un centre de symétrie de la courbe de f si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\begin{cases} 2a - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$



$\mathcal{C}_f$
c
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$

Méthode :

Soit f une fonction et $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour montrer que le point $c\ (a\ :\ b)$ est un centre de symétrie de la courbe de f, on détermine d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Ensuite, on montre que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $2a - x \in \mathcal{D}_f$.
Et enfin, on montre que $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
Si $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, alors la condition : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow 2a - x \in \mathcal{D}_f$, devient évidente.

Exemple(s) 1.7.2.1 *Soit* $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$. *Montrer que le point* $c\ (2\ :\ 3)$ *est un centre de symétrie de la courbe de* f.

Correction :

- $f(x)$ *existe si et seulement si* $x - 2 \neq 0$. *Donc* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- *Montrons que pour tout réel* $x \in \mathcal{D}_f$, $4 - x \in \mathcal{D}_f$.
  Soit $x \in \mathcal{D}_f$; *supposons que* $4 - x \notin \mathcal{D}_f$.
  On a :
  $$\begin{aligned} 4 - x \notin \mathcal{D}_f \Rightarrow 4 - x = 2 &\Rightarrow -x = -2 \\ &\Rightarrow x = 2 \\ &\Rightarrow x \notin \mathcal{D}_f. \text{ Ce qui est absurde.} \end{aligned}$$
  Donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $4 - x \in \mathcal{D}_f$.
- *Calculons* $f(4-x) + f(x)$.
  $$\begin{aligned} f(2-x) - f(x) &= \frac{3(4-x)-1}{(4-x)-2} + \frac{3x-1}{x-2} = \frac{-3x+11}{-x+2} + \frac{3x-1}{x-2} \\ &= \frac{3x-11}{x-2} + \frac{3x-1}{x-2} = \frac{6x-12}{x-2} \\ &= 6 \end{aligned}$$
  Donc $f(2-x) - f(x) = 6$
  Par conséquent le point $c\ (2\ :\ 3)$ *est un centre de symétrie de la courbe de* f.

Remarque(s) 1.7.2.1 *

On peut aussi définir le centre de symétrie comme suit :
Le point $c\ (a\ :\ b)$ *est un centre de symétrie de la courbe de* f *si et seulement si on a :*

$$\begin{cases} a - x \in \mathcal{D}_f \\ a + x \in \mathcal{D}_f \\ f(a-x) + f(a+x) = 2b \end{cases}$$

Remarque(s) 1.7.2.2 *

Si le point $c\ (a\ :\ b)$ *est un centre de symétrie de la courbe de* f , *alors on peut étudier la fonction* f *sur* $\mathcal{D}_f \cap [a\ ;\ +\infty[$ *et compléter la courbe par la symétrie central de centre* $c\ (a\ ;\ b)$.

Exercices 1.7.2.1 *Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer si le point* $c\ (a\ :\ b)$ *est un centre de symétrie ou non de sa courbe représentative.*

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2}$, $c\ (1; 2)$

2) $g(x) = x^2 + 4x + 3$, $c\ (-1; 2)$

3) $h(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x}$, $c\ (1; 1)$

4) $i(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, $c\ (2; 1)$

1.8 Fonction périodique

Définition 1.8.0.1 *

Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
La fonction f est dite périodique s'il existe une réel p non nul tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a :

$$\begin{cases} x+p \in \mathcal{D}_f \\ f(x+p) = f(x) \end{cases}$$

> *On dit que p est une période de f.*

> *On appelle période de f le réel T strictement positif le plus petit de toutes les périodes de f.*

Méthode :

Pour montrer qu'une fonction f est périodique de période T, on détermine d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Ensuite, on montre que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x+T \in \mathcal{D}_f$.
Et enfin, on montre que $f(x+T) = f(x)$.

Exemple(s) 1.8.0.1 *Soit $f(x) = \cos x$. Montrer que f est périodique de période 2π.*

Correction :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. *Donc pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $x+2\pi \in \mathcal{D}_f$.*
- *Calculons $f(x+2\pi)$.*
  On a : $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x)$.
  Donc f est périodique de période 2π.

Remarque(s) 1.8.0.1 *Soit f une fonction périodique de période T. On a :*

> *Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $T' = kT$ est aussi une période de f*

> *Pour tout réel $a \neq 0$, $f(ax+b)$ est périodique de période : $T' = \dfrac{T}{|a|}$*

Exemple(s) 1.8.0.2 *On considère la fonction : $f(x) = \cos x$, qui est périodique de période $T = 2\pi$.*

- *Les nombres : -2π, 4π et 10π sont aussi des périodes de f.*
- *La fonction : $g(x) = \cos(-2x+1)$, est une fonction périodique de période :* $T' = \dfrac{2\pi}{|-2|} = \pi$.

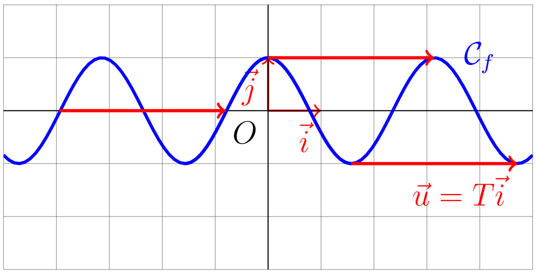
Comportement géométrique d'une fonction périodique

Remarque(s) 1.8.0.2 *

Soit f une fonction périodique de période T.

> *La courbe représentative de f reste inchangée par la translation du vecteur : $\overrightarrow{U} = T\vec{i}$.*

> *On peut étudier et tracer une partie de la courbe représentative de f sur un intervalle de longueur T et compléter la courbe par translation du vecteur : $\overrightarrow{U} = T\vec{i}$.*



Exercices 1.8.0.1 *Pour chacune des fonctions ci-dessous, montrer quelle est périodique de période T.*

1) $f(x) = \tan x \quad , \quad T = \pi$

2) $g(x) = \cos(\frac{x}{3}) \quad , \quad T = 6\pi$

3) $h(x) = \sin^2(2x) \quad , \quad T = \frac{\pi}{2}$

4) $i(x) = 2x - E(2x) \quad , \quad T = \frac{1}{2}$

1.9 Lecture graphique

1.9.1 Image directe, Image réciproque

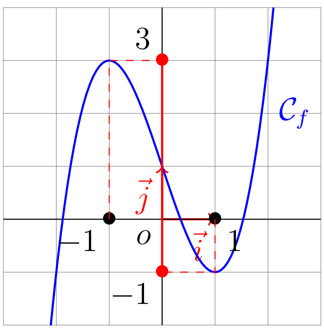
Définition 1.9.1.1 *

Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$ une fonction.

- *Soit I un sous-ensemble de A, On appelle image directe de I par f, noté $f(I)$, l'ensemble des images de tous les réels de I.*
  On a : $f(I) = \{f(x) \text{ tels que } x \in I\}$.
- *Soit J un sous-ensemble de B, On appelle image réciproque de J par f, noté $f^{-1}(J)$, l'ensemble des antécédents de tous les réels de J.*
  On a : $f^{-1}(J) = \{x \text{ tels que } f(x) \in J\}$.

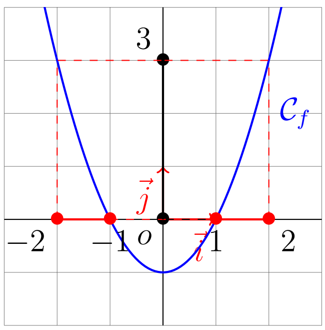
Exemple(s) 1.9.1.1 *Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.*

1) Soit f la fonction de courbe $\mathcal{C}_f$ représentée ci-dessous.



On a : $f([-1\ ;\ 1]) = [-1\ ;\ 3]$.

2) Soit g la fonction de courbe $\mathcal{C}_g$ représentée ci-dessous.



On a : $g^{-1}([0\ ;\ 3]) = [-2\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ 2]$

Exercices 1.9.1.1 *Pour chacun des cas suivants tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f puis déterminer graphiquement $f(I)$ et $f^{-1}(J)$.*

1. $f(x) = x^2 + x - 2\ ,\ I = [-1\ ;\ 0]\ ,\ J = [0\ ;\ 4]$
2. $f(x) = x^3 - 3x - 1\ ,\ I = [1\ ;\ 2]\ ,\ J = [-1\ ;\ -3]$
3. $f(x) = x^2 - 2\ ,\ I = [0\ ;\ 1]\ ,\ J = [-1\ ;\ 2]$
4. $f(x) = x^3\ ,\ I = [-1\ ;\ 1]\ ,\ J = [0\ ;\ 1]$

1.9.2 Résolution graphique d'équations

Propriété 1.9.2.1 *

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

- *L'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution si et seulement les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent. L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.*
- *Si $g(x) = y_0$ avec $y_0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $f(x) = g(x)$ admet comme ensemble solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = y_0$.*

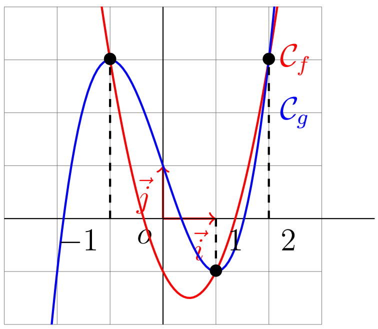
Méthode

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

- Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, on trace les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
  Ensuite, on détermine les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, puis on les présente comme étant les solutions de l'équation.
- Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = y_0$ avec $y_0 \in \mathbb{R}$, on trace la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = y_0$.
  Ensuite, on détermine les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ coupe la droite, et on les présente comme étant les solutions de l'équation.

Exemple(s) 1.9.2.1 *Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.*

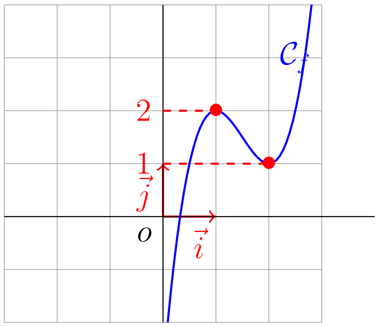
1. *On considère les fonctions f et g représentées ci-dessous.*
   Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.



Les courbes des fonctions f et g se coupent aux points d'abscisses : -1 ; 1 et 2. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est :

$$\mathcal{S} = \{-1;\ 1;\ 2\}$$

2. *Soit f la fonction de courbe $\mathcal{C}_f$ représentée ci-dessous.*
   Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation : $f(x) = m$.



On a :

- *Si* $m \in]-\infty\ ;\ 1[$ *alors,* $f(x) = m$ *admet une seule solution.*
- *Si* $m \in]2\ ;\ +\infty[$ *alors,* $f(x) = m$ *admet une seule solution.*
- *Si* $m \in]1\ ;\ 2[$ *alors,* $f(x) = m$ *admet trois solutions.*
- *Si* $m = 1$ *ou* $m = 2$ *alors,* $f(x) = m$ *admet deux solutions.*

Exercices 1.9.2.1 *Pour chacun des cas suivants, résoudre graphiquement l'équation :* $f(x) = g(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1\ ;\ g(x) = -x + 3$
2. $f(x) = x^2 + 1\ ;\ g(x) = x^2 - 2x + 1$
3. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2\ ;\ g(x) = 1$

1.10 Fonctions associées

Définition 1.10.0.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. *Soit f une fonction de courbe $\mathcal{C}_f$, a et b deux réels. On appelle fonctions associées à f les fonctions suivantes :*

> $x \mapsto f(x-a) + b$
> $x \mapsto -f(x)$
> $x \mapsto f(-x)$
> $x \mapsto |f(x)|$
> $x \mapsto f(|x|)$

L'objectif de cette partie est de représenter les courbes des fonctions associées à f à l'aide de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

1.10.1 Fonction $x \mapsto f(x-a)+b$

L'objectif de cette partie est de trouver une méthode de représentation de la courbe de la fonction $x \mapsto f(x-a)+b$ à partir de la courbe de f.

Rappel 1.10.1.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. Soit $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un point du plan, a, b deux réels et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

Un point $M'\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ est l'image de M par la translation du vecteur $\vec{u}$ si et seulement si on a :

$$\begin{cases} X' = X + a \\ Y' = Y + b \end{cases}$$

Propriété 1.10.1.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Soit f une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$; a et b deux nombres réels.
Soit g la fonction définit par : $g(x) = f(x-a)+b$.
La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g est l'image de la courbe de f par la translation du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

En effet :
Soit $M'\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{C}_g$. On pose : $X = x - a$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le vecteur de coordonnées $(a\ ;\ b)$.
On a :

$$\begin{aligned} M'\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} &\Rightarrow M'\begin{pmatrix} X & + & a \\ f(X) & + & b \end{pmatrix} \Rightarrow M' = t_{\vec{u}}\left(M\right) \text{ avec } M\begin{pmatrix} X \\ f(X) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f \\ &\Rightarrow \mathcal{C}_g \subset t_{\vec{u}}\left(\mathcal{C}_f\right). \end{aligned}$$

D'autre part, soit $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{C}_f$. On pose : $t_{\vec{u}}\left(M\right) = M'$ et $X' = x + a$.
On a :

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}\left(M\right) = M' &\Rightarrow M'\begin{pmatrix} x+a \\ f(x)+b \end{pmatrix} \Rightarrow M'\begin{pmatrix} & X' & \\ f(X'-a) & + & b \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow M'\begin{pmatrix} X' \\ g(X') \end{pmatrix} \Rightarrow M' \in \mathcal{C}_g \\ &\Rightarrow t_{\vec{u}}\left(\mathcal{C}_f\right) \subset \mathcal{C}_g. \end{aligned}$$

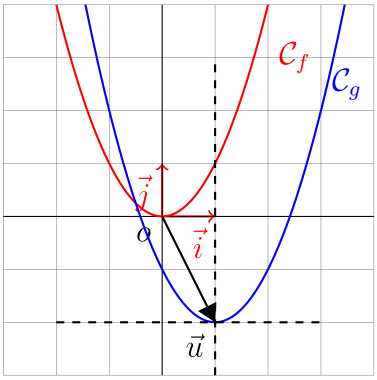
Ainsi on a : $\begin{cases} \mathcal{C}_g \subset t_{\vec{u}}\left(\mathcal{C}_f\right) \\ t_{\vec{u}}\left(\mathcal{C}_f\right) \subset \mathcal{C}_g \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{C}_g = t_{\vec{u}}\left(\mathcal{C}_f\right).$
D'où, $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation du vecteur $\vec{u}$.

Méthode :

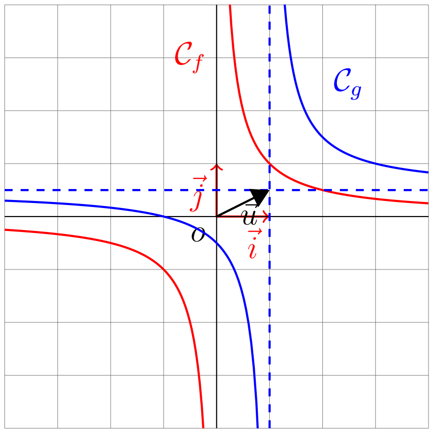
Pour représenter la courbe de la fonction $x \mapsto f(x-a)+b$ à partir de la courbe de f, on trace d'abord la courbe de f.
Ensuite, on construit son image par la translation du vecteur $\overrightarrow{u}(a\ ;\ b)$.
Ainsi, la courbe obtenue devient la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x-a)+b$.

Exemple(s) 1.10.1.1 *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) Soit $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = f(x-1) - 2$.
Représentons dans le repère $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$.
$\mathcal{C}_g$ *est l'image de* $\mathcal{C}_f$ *par la translation du vecteur :* $\overrightarrow{u}\ (1\ ;\ -2)$.



2) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *et* $g(x) = f(x-1) + \dfrac{1}{2}$.
Représentons dans le repère $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$.
$\mathcal{C}_g$ *est l'image de* $\mathcal{C}_f$ *par la translation du vecteur :* $\overrightarrow{u}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.



Exercices 1.10.1.1 *Pour chacun des cas suivants tracer les courbes* $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *des fonctions* f *et* g *dans un même repère.*

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-2)^2 + 1$
2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$
3) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$
4) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = \sqrt{x+2} + 1$

1.10.2 Fonction $x \mapsto -f(x)$

L'objectif de cette partie est de trouver une méthode de représentation de la courbe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ à partir de la courbe de f.

Rappel 1.10.2.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Soit $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *un point du plan.*

Le point $M'\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ *est l'image de* M *par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si on a :*

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y \end{cases}$$

Propriété 1.10.2.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Soit f une fonction de courbe $\mathcal{C}_f$. La courbe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

En effet, posons : $g(x) = -f(x)$.
Soit $M'\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{C}_g$ et $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{C}_f$. On a

$$M'\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow M'\begin{pmatrix} x \\ -f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M' \text{ est l'image de } M \text{ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe } \left(O,\ \vec{i}\right).$$

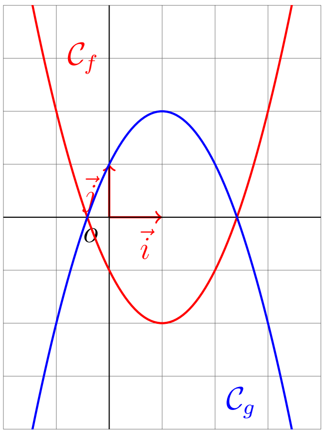
D'où $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Méthode :

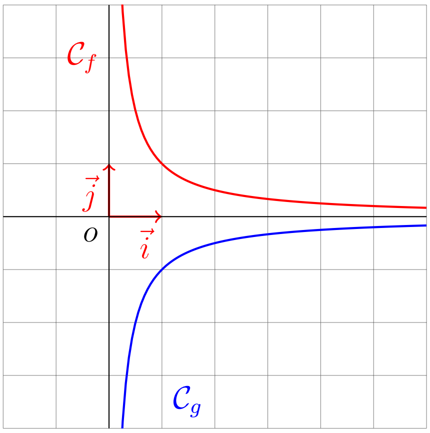
Pour représenter la courbe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ à partir de la courbe de f, on trace d'abord la courbe de f. Ensuite, on construit son image par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
Ainsi, la courbe obtenue devient la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(x)$.

Exemple(s) 1.10.2.1 *Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.*

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = -f(x)$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.



Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $g(x) = -f(x)$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.



Exercices 1.10.2.1 *Pour chacun des cas suivants tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g dans un même repère.*

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$
2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{-1}{x}$
3) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -x^2 + 2x - 1$
4) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = -\sqrt{x} - 1$

1.10.3 Fonction $x \mapsto f(-x)$

L'objectif de cette partie est de trouver une méthode de représentation de la courbe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ à partir de la courbe de f.

Rappel 1.10.3.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Soit $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un point du plan.

Si un point $M'\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ est l'image de M par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées , alors :

$$\begin{cases} X' &= -X \\ Y' &= Y \end{cases}$$

Propriété 1.10.3.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Soit f une fonction de courbe $\mathcal{C}_f$. La courbe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

En effet, posons : $g(x) = f(-x)$.
Soit $M'\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{C}_g$. On a

$$\begin{aligned} M'\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} &\Rightarrow M'\begin{pmatrix} -X \\ f(X) \end{pmatrix} \text{ avec } X = -x \\ &\Rightarrow M' = S_{(O;\ \vec{j})}(M) \text{ avec } M\begin{pmatrix} X \\ f(X) \end{pmatrix} \text{ un point de } \mathcal{C}_f \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{C}_g$ est inclus dans l'ensemble image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
D'autre part, soit $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{C}_f$. On a

$$\begin{aligned} S_{(O;\ \vec{j})}(M) = M' \Rightarrow M'\begin{pmatrix} -x \\ f(x) \end{pmatrix} &\Rightarrow M'\begin{pmatrix} X \\ f(-X) \end{pmatrix} \text{ avec } X = -x \\ &\Rightarrow M'\begin{pmatrix} X \\ g(X) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow M' \in \mathcal{C}_g \end{aligned}$$

Donc l'ensemble image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées est inclus dans $\mathcal{C}_g$.

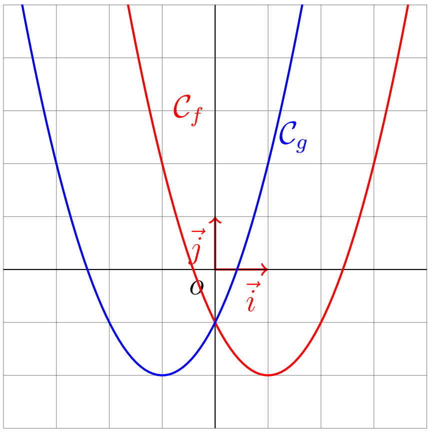
Par conséquent, La courbe de la fonction $g(x) = f(-x)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

Méthode :

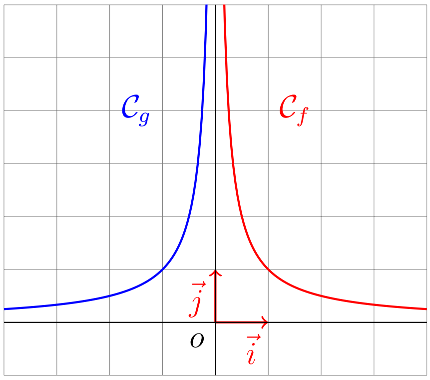
Pour représenter la courbe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ à partir de celle de f, on trace d'abord la courbe de f. Ensuite, on construit son image par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
Ainsi, la courbe obtenue devient la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$.

Exemple(s) 1.10.3.1 *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) Soit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ *et* $g(x) = f(-x)$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *dans le repère.*



2) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *définie sur* $]0\ ;\ +\infty[$ *et* $g(x) = f(-x)$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *dans le repère.*



Exercices 1.10.3.1 *Pour chacun des cas suivants tracer les courbes* $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *des fonctions* f *et* g *dans un même repère.*

1) $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (-x-1)^2$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{-x+1}$

3) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$

4) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = \sqrt{-x} + 1$

1.10.4 Fonction $x \mapsto |f(x)|$

L'objectif de cette partie est de trouver une méthode de représentation de la courbe de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ à partir de la courbe de f.

Rappel 1.10.4.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Soit f *une fonction de courbe* $\mathcal{C}_f$ *définie sur un intervalle* I.

> *La courbe* $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de l'axe* $\left(O,\ \vec{i}\right)$ *sur* I, *si et seulement si* $\forall\ x \in\ I,\ f(x) \geq 0$.
> *La courbe* $\mathcal{C}_f$ *est en dessous de l'axe* $\left(O,\ \vec{i}\right)$ *sur* I, *si et seulement si* $\forall\ x \in\ I,\ f(x) \leq 0$.

Propriété 1.10.4.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. *Soit* f *une fonction de courbe* $\mathcal{C}_f$.

> *Sur les parties où la courbe* $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de l'axe des abscisses, la courbe de la fonction* $x \mapsto |f(x)|$ *et* $\mathcal{C}_f$ *sont confondues.*
> *Sur les parties où la courbe* $\mathcal{C}_f$ *est en dessous de l'axe des abscisses, la courbe de la fonction* $x \mapsto |f(x)|$ *est l'image de* $\mathcal{C}_f$ *par la symétrie orthogonale d'axe* $\left(O,\ \vec{i}\right)$.

En effet, soit f une fonction de courbe $\mathcal{C}_f$ et g la fonction de courbe $\mathcal{C}_g$ définie par : $g(x) = |f(x)|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_f \text{ est au dessus de l'axe } \left(O,\ \vec{i}\right) &\Rightarrow f(x) \geq 0 \\
&\Rightarrow |f(x)| = f(x) \\
&\Rightarrow g(x) = f(x) \\
&\Rightarrow \mathcal{C}_g \textit{ et } \mathcal{C}_f \ \text{ sont confondues.}
\end{aligned}$$

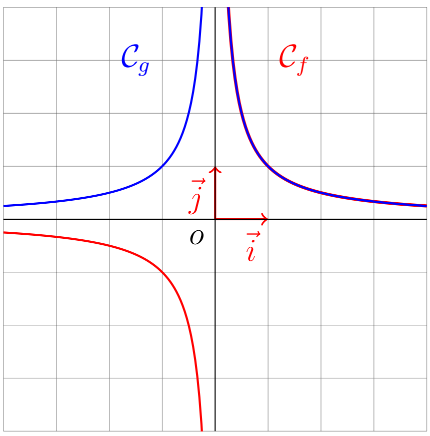
$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de l'axe } \left(O,\ \vec{i}\right) &\Rightarrow f(x) \leq 0 \\
&\Rightarrow |f(x)| = -f(x) \\
&\Rightarrow g(x) = -f(x) \\
&\Rightarrow \mathcal{C}_g \ \text{ est l'image de } \mathcal{C}_f \text{ par la symétrie orthogonale } \mathcal{S}_{(O,\ \vec{i})}.
\end{aligned}$$

Méthode :

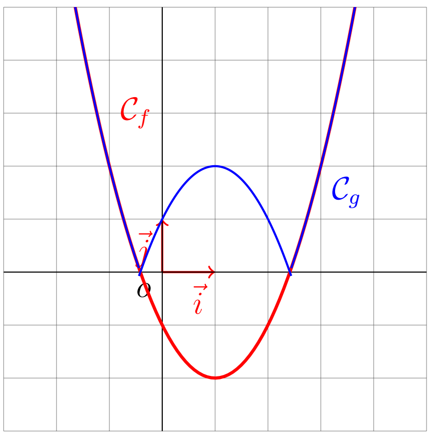
Pour représenter la courbe de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ à partir de celle de f, on trace d'abord la courbe de f.
Sur les parties de $\mathcal{C}_f$ situées au dessus de l'axe des abscisses, la courbe de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ et $\mathcal{C}_f$ sont confondues.
Et pour le reste, on construit l'image des parties de $\mathcal{C}_f$ situées en dessous de l'axe des abscisses par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\left(O,\ \vec{i}\right)$.

Exemple(s) 1.10.4.1 *Le plan est muni d'un repère* $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *et* $g(x) = |f(x)|$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *dans le repère.*



Soit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ *et* $g(x) = |f(x)|$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *dans le repère.*



Exercices 1.10.4.1 *Pour chacune des fonctions* f*, tracer la courbe* $\mathcal{C}_f$ *de* f *et en déduire celle de la fonction* $x \to |f(x)|$ *dans un même repère.*

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$; 2) $g(x) = x^2 - 2x - 2$; 3) $h(x) = (x-1)^3$; 4) $i(x) = \sqrt{x+1} - 1$.

1.10.5 Fonction $x \mapsto f(|x|)$

L'objectif de cette partie est de trouver une méthode de représentation de la courbe de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ à partir de la courbe de f.

Propriété 1.10.5.1 *

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. Soit f une fonction de courbe $\mathcal{C}_f$.

> *La courbe de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
> *La portion de la courbe de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, est confondue à celle de $\mathcal{C}_f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

En effet, soit g la fonction de courbe $\mathcal{C}_g$ définie par : $g(x) = f(|x|)$.

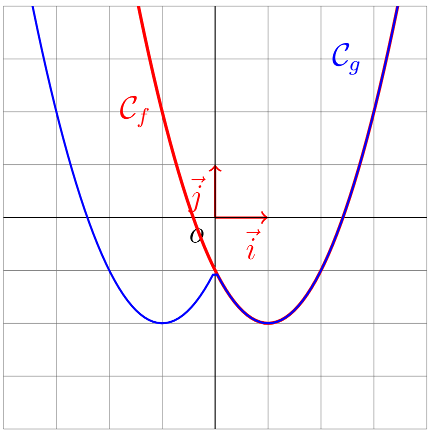
-] La fonction g est une fonction paire $\big(g(-x) = g(x)\big)$ donc la courbe de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
-] Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a : $g(x) = f(x)$, donc la portion de la courbe de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$, est confondue à celle de $\mathcal{C}_f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Méthode :

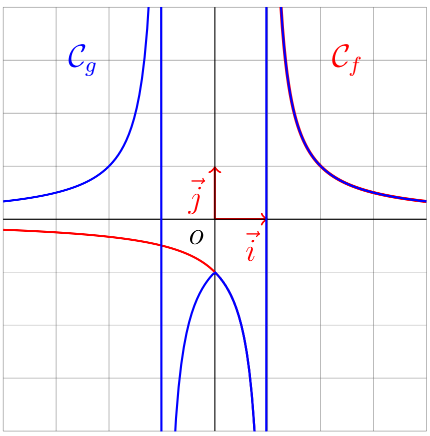
Pour représenter la courbe de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ à partir de celle de f, on trace d'abord la courbe de f.
Sur la partie de $\mathcal{C}_f$ située à la droite de l'axe des ordonnées, la courbe de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ et $\mathcal{C}_f$ sont confondues.
Et pour le reste, on construit l'image de la partie de $\mathcal{C}_f$ située à la droite de l'axe des ordonnées par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\left(O,\ \vec{j}\right)$.

Exemple(s) 1.10.5.1 *

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = f(|x|)$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.



Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = |f(x)|$.
Représentons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère.



Exercices 1.10.5.1 *Pour chacune des fonctions f, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f et en déduire celle de la fonction $x \to f(|x|)$ dans un même repère.*

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$; 2) $g(x) = x^2 - 2x - 2$; 3) $h(x) = (x-1)^3$; 4) $i(x) = \sqrt{x+1} - 1$.

1.11 Exercices

Exercices 1 *On considère les fonctions f, g et h définies par :*

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad h(x) = x - 1.$$

1. *Déterminer le domaine et les expressions de $g \circ f$ et $f \circ g$.*
2. *Montrer que $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (f \circ g)$ ont même domaine de définition $\mathcal{D}$ et que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (f \circ g)](x)$.*
3. *Déterminer et comparer les fonctions $g \circ f \circ h$ et $h \circ f \circ g$.*

Exercices 2 *Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ et $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.*

1. *Déterminer le domaine de définition et l'expression de chacune des fonctions suivantes : $f + g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ et $3f - 2g$.*
2. *Déterminer le domaine de définition de $g \circ f$ et de $f \circ g$, puis comparer $g \circ f(x)$ et de $f \circ g(x)$. Qu'en déduit-on ?*

Exercices 3 *On considère les fonctions f, g et h définies par :*

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad ; \quad g(x) = \frac{-x}{2} + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{-x^2}{2} + 1.$$

Montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Exercices 4 *Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$.*

1. *Déterminer les réels a et b tel que : $f(x) = \dfrac{a}{x^2+3} + b$.*
2. *En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exercices 5 *On considère les fonctions f et g définies par :*

$$f(x) = 3x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}.$$

1. *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 \leq g(x) \leq 2$.*
   Que peut-on en déduire pour la fonction g.
2. *Démontrer que $g \circ f$ est bornée.*
3. *Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.*
   En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-2 \leq (f \circ g)(x) \leq 1$.
   Que peut-on en déduire pour la fonction $f \circ g$.

Exercices 6 *Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$*

1. *Trouver les réels a et b tels que : $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.*
2. *Étudier les variations de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.*
3. *En déduire une comparaison des nombres : $\dfrac{1000}{999}$ et $\dfrac{999}{998}$.*

Exercices 7 *

1. *Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $4h(-x) + h(x) = 4x^2 + |x|$.*
   Montrer que h est une fonction paire puis déterminer l'expression de $h(x)$.
2. *Soit $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 7}{x^2 - 2x - 3}$ et $g(x) = 2 - x$.*
   (a) *Déterminer l'ensemble de définition de la composée $f \circ g$, puis montrer $f \circ g(x) + f(x) = -4$.*
   (b) *En déduire que la courbe représentative de la fonction f admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.*

Exercices 8 *Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + 1}$ avec m un nombre réel.*
Déterminer m pour que le point $I(-1\ ;\ -1)$ soit un centre de symétrie de la courbe de h.

Exercices 9 *Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition de g.*
2. *Démontrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a : $g(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$.*
3. *Étudier la parité de g.*

Exercices 10 *Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(2x + \dfrac{\pi}{3})$.*

1. *Montrer que f est périodique de période π.*
2. *Montrer que le point $\Omega(\dfrac{\pi}{3}\ ;\ 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.*

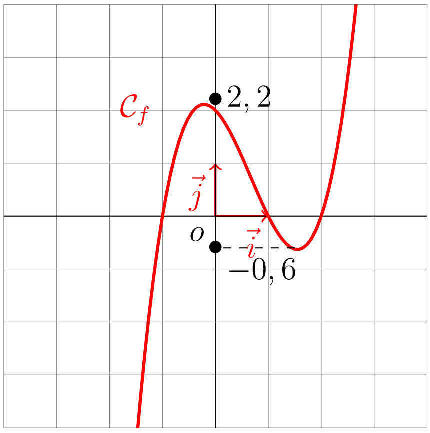
Exercices 11 *Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$. On pose : $g(x) = f(\cos x)$.*

1. *Montrer que g est périodique.*
2. *Montrer que le point $\Omega(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de g.*

Exercices 12 *Soit f la fonction définie par : $f(x) = |x + 2| + |x - 2| + 2x$.*

1. *Écrire $f(x)$ sans les symbole de la valeur absolue.*
2. *Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.*
3. *Résoudre graphiquement les équations : $f(x) = 2$ et $f(x) = x$.*

Exercices 13 *La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.*



1. *Déterminer les solutions de l'équation :* $f(x) = 0$.
2. *Déterminer l'ensemble solution de l'inéquation :* $f(x) > 0$.
3. *Soit* $m \in \mathbb{R}$.
   Déterminer suivant les valeurs de m *le nombre de solutions de l'équation :* $f(x) = m$.

Exercices 14 *Soit* g *la fonction définie par :* $g(x) = x(x-2)$.

1. *Étudier la parité de la fonction* g.
2. *Démontrer que :* $g(x) = (x-1)^2 - 1$. *En déduire que* g *est minorée par* -1.
3. *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = x^2$.
   Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ *de* f *dans un repère orthonormé* $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
4. *Tracer la courbe* $\mathcal{C}_g$ *de la fonction* g *à partir de celle de* f.

Exercices 15 *On considère la fonction* g *définie par :* $g(x) = -x^2 + 2x + 1$.

1. *Montrer que :* $g(x) = -(x-1)^2 + 2$.
2. *Étudier le sens de variation de* g *sur* $]-\infty\ ;\ 1]$ *et sur* $[1\ ;\ +\infty[$.
3. *Montrer que* g *admet un maximum sur* $\mathbb{R}$.
4. *Soit* f *la fonction définie par :* $f(x) = -x^2$.
   Tracer la courbe de f *dans un repère orthonormé* $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
5. *Tracer la courbe de* g *à partir de celle de* f.
6. *On considère les fonctions* k *et* h *définies par :*
   $$k(x) = |-x^2 + 2x + 1| \quad \text{et} \quad h(x) = -x^2 + |x| + 1.$$
   Tracer les courbes de k *et* h *dans le même repère.*

Exercices 16 *On considère les fonctions* f, g *et* h *définies par :*

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{x-2} \quad \text{et} \quad h(x) = \left|\frac{x}{x-2}\right|.$$

1. *Représenter graphiquement la fonction* f.
2. *Trouver les réels* a *et* b *tels que :* $g(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$. *Tracer la courbe de* g *à partir de celle de* f.
3. *Tracer la courbe de* h *à partir de celle* g.
4. *Soit* k *la fonction définie par :* $k(x) = \dfrac{x}{x+2}$.
   Trouver une relation entre $k(x)$ *et* $g(x)$, *puis tracer la courbe de* k *à partir de celle de* g.