✍ Exercice 1

Soit l'équation (E) de paramètre $m \in \mathbb{R}$ donnée par : $(1-m)x^2+2(m-5)x+16-m=O$.

1 Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles (E) admet deux racines de signes contraires.

2 On suppose que (E) admet deux solutions x' et x"

- **a** Trouver une relation indépendante de m liant x' et x".
- **b** Pour quelles valeurs de m a-t-on : $x'^2+x'^2=1$; $x'+x"=5x'x"$.
- **c** Pour quelles valeurs de m, x' et x" vérifient la relation : $x'<x"<2$

3 Déterminer l'ensemble des valeurs pour lesquelles $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-m)x^2+2(m-5)x+16-m<O$.

✍ Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1 $\sqrt{16x+9}=8x-3$

2 $\sqrt{4-x^2}=x-1$

3 $2x+1=\sqrt{x^2+5x+3}$

4 $\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x-1}=0$

5 $\sqrt{2x^2-13x-27}=\sqrt{14x+1}$

6 $\sqrt{2x^2-7x+4}=\sqrt{x^2+3x-5}$

7 $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-24}=\sqrt{x}$

8 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-8}=5$

9 $x^2-6x-\sqrt{x^2-6x-3}=5$

10 $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

11 $\sqrt{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}=2$

12 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-8}=1$

✍ Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1 $\sqrt{3x^2-1}<2x-1$

2 $\sqrt{5x^2+x-9}<2x+1$

3 $\sqrt{3x^2+2x-1}<\sqrt{2x^2+x+1}$

4 $\sqrt{x+1}>x-3$

5 $\sqrt{-x^2-3x+4}\leq\sqrt{3x+4}$

6 $\sqrt{-5x^2+3x+2}\geq 5x-1$

7 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}>\sqrt{4x+5}$

8 $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x-1}>2$

✍ Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes d'équations suivantes :

$a)\ \begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} \sqrt{x}+\dfrac{3}{y}=-1 \\ 2\sqrt{x}-\dfrac{1}{y}=5 \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} x^3+y^3=189 \\ x+y=9 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$ $\quad e)\ \begin{cases} \dfrac{3}{y-1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{y-1}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{29}{12} \end{cases}$ $\quad f)\ \begin{cases} 2|x|-2|y|=8 \\ 6|x|-5|y|=5 \end{cases}$

✍ Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes d'équations suivantes

$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+6z=3 \\ 2x-9y+12z=0 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x+y-3z=5 \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$

$d)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+6z=3 \\ 2x-9y+12z=0 \end{cases}$ $e)\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}-\dfrac{2}{z+1}=-4 \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}-\dfrac{1}{z+1}=-3 \\ -\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}+\dfrac{1}{z+1}=-2=0 \end{cases}$ $f)\begin{cases} 9x+my-z=4 \\ 4mx-2y+(m-1)z=m \\ 5x+(2m-1)y-3z=3(m+2) \end{cases}$

✍ **Exercice 6 Programmation linéaire**

Une usine fabrique deux types de sandales S_1 et S_2 à l'aide de deux machines m_1 et m_2. Chaque chaussure en fabrication doit passer successivement sur les machines par un ordre différent. La sandale S_1 fait 30 minutes sur m_1 et 20 minutes sur m_2. La sandale S_2 fait 40 minutes sur m_1 et 100 minutes sur m_2.
La machine m_1 est disponible 6000 minutes par mois et la machine m_2 est disponible 4000 minutes par mois. Le bénéfice réalisé sur S_1 est 400F, celui réalisé sur S_2 est 200F.

1. En désignant par x le nombre de S_1, y le nombre de S_2n traduis les données du problème par quatre inéquations. Ces inéquations sont appelées contraintes du problème.
2. Calculer le bénéfice total mensuel $B(x,y)$.
3. Combien doit-on fabriquer mensuellement de sandales S_1 et S_2 pour avoir un bénéfice maximal ?

TD DE PUNITION (EQUATIONS PARAMETRIQUES)

ME ATHENA SEDAR — $1^{ère}S_2$

Exercice 1

On considère l'équation (E) : $mx^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre suivant les valeurs de m l'équation (E).
2. Trouver les valeurs de m pour lesquelles (E) admet :
   a. deux solutions de signes contraires.
   b. deux solutions positives.
3. Dans le cas où (E) admet deux solutions x_1 et x_2, trouver une relation indépendante de m liant x_1 et x_2.

Exercice 2

On considère le trinôme $P(x) = (2m-1)x^2 - 2mx + 1$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Discuter suivants les valeurs de m le nombre de racine de $P(x)$.
2. Trouver les valeurs de m pour lesquelles $P(x)$ admet :
   a. deux racines négatives.
   b. deux racines inverses.
3. Dans le cas où $P(x)$ admet deux solutions x_1 et x_2, trouver une relation indépendante de m liant x_1 et x_2.

Exercice 3 Existence et signe des solutions

Dans chacun des cas suivants, discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des solutions ;

1. $mx^2 - 2(m-2)x - m - 10 =$
2. $(2m+1)x^2 - (3m+1)x + 3m + 1 = 0$
3. $(2m-3)x^2 + (m-1)x + 4(m-1) = 0$
4. $(2m-1)x^2 - (4m-2)x - 4 = 0$

Exercice 4

On considère l'équation du second degré (E_m) : $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant suivant les valeurs de m les solutions de (E_m).
2. Etudier suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des solutions x_1 et x_2 de (E_m).
3. Pour quelles valeurs de m, (E_m) admet deux solutions de signes contraires ?
4. Pour quelles valeurs de m, (E_m) admet deux solutions positives ?
5. Déterminer m pour que deux soit une solution de (E_m). Trouver l'autre solution de (E_m).

Exercice 5

Soit l'équation (E) : $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 5 = 0$.

1. Peut-on trouver m pour que l'équation ait deux solutions :
   a. opposées.
   b. Inverses.
   c. dont l'une est le double de l'autre.
2. Déterminer m tel que : $x_1^2 + x_2^2 = 53$.
3. Déterminer m tel que : $|x_1 - x_2| = 13$

✍ **Exercice 6**

Soit l'équation : $(m-2)x^2 - 2(m+2)x + 2m - 2) = 0$.

1 Discuter suivant les valeurs de m, les solutions de l'équation.

2 Dans le cas où l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, déterminer m tel que :

a $x_1^2 + x_2^2 = 35$ et $|x_1 - x_2| = 5$

b $x_1 < 2 < x_2$ et $-1 < x_1 < x_2$.

3 Trouver une relation indépendante de m entre x_1 et x_2.

4 Déterminer m pour que l'équation admette :

a deux solutions de signes contraires.

b deux solutions négatives.

c deux solutions positives.

d deux solutions dont inverse.

✍ **Exercice 7**

Soit (E) : $(m-4)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ avec m un réel.

1 Résoudre suivant les valeurs de m l'équation (E).

2 Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (E).

3 On suppose maintenant que (E) admet deux solutions distinctes α et β .

a Etablir une relation indépendante de m entre α et β .

b Calculer les valeurs de m et α lors que $\beta = 0$.

4 Pour quelles valeurs de m a-t-on :

a $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$.

b $\alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta$

✍ **Exercice 8**

On considère les deux équations suivantes : $\begin{cases} x^2 - (3m+1)x + 4 = 0 & (E_1) \\ x^2 - (m-3)x - 8 = 0 & (E_2) \end{cases}$

1 **a** Montrer que si ces deux équations admettent une solution commune x_0 alors $x_0 = \frac{6}{m+2}$.

b En déduire les valeurs de m pour que les équations (E_1) et (E_2) aient une solutions commune.

2 On considère l'équation : $x^2 - (m-3)x - 8 = 0$

a Calculer m pour que l'une des solutions de (E_2) soit $2\sqrt{2}$.

b Calculer m pour que l'une des solutions de (E_2) soit x_1 avec $x_1 \in \mathbb{R}$.

✍ **Exercice 9**

Soit l'équation (E) suivante : $x^2 + (2m+1)x + \frac{1}{4}(3m-1)(2m-1) = 0$.

1 Etudier suivant les valeurs de m l'existence des solutions x' et x'' de cette équation.

2 Le réel $\frac{3}{2}$ peut-il être racine de cette équation ?

3 Calculer en fonction de m : $A = \dfrac{1}{2x'-3} + \dfrac{1}{2x''-3}$.

4 Déterminer l'ensemble des valeurs de m telles que : $-mx^2 + 2x - 3 < 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

✍ **Exercice 10**

On considère le trinôme du second degré en x : $f_m(x) = mx^2 - (m-1)(m^2+1)x + m(m-1)^2$ où m est un paramètre réel.

1 Montrer que lors que $m \neq 0$, le discriminant de l'équation d'inconnue x, $f_m(x) = 0$ est un carré parfait. Etudier suivant les valeurs de m le signe des solutions de cette équation.

2 Calculer en fonction de m les solutions x' et x'' de $f_m(x) = 0$.

a x' est la solution qui est une fraction en m. Vérifier que $x' - x'' = \frac{(m-1)(m^2-1)}{m}$.

b En déduire les valeurs de m pour lesquelles on a : $x' > x''$.

3 Pour qu'elles valeurs de m a-t-on $x'' < -2$.

4 Montrer que $\forall m \neq 0$, on a : $x' > -2$.

5 Déduire des questions précédentes, l'ensemble des valeurs de m pour les quelles on a $x' < -2 < x''$.

Exercice 1 Factorisation de polynôme

Dans chacun des cas suivants, montrer que x_0 est une racine de $P(x)$ puis factoriser $P(x)$ (en polynôme du premier degré si possible).

1. $P(x) = x^3 - 21x + 36 \quad et \quad x_0 = 3$
2. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad et \quad x_0 = -1$
3. $P(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 24 \quad et \quad x_0 = 3$
4. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 \quad et \quad x_0 = -1$
5. $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3 \quad et \quad x_0 = -1$
6. $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6 \quad et \quad x_0 = \sqrt{3}$
7. $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 \quad et \quad x_0 = -2$
8. $P(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2 \quad et \quad x_0 = 2$

Exercice 2 Egalité de deux polynômes

Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x, on ait :

1. $2x^3 - 3x^2 - 6x + 35 = (2x + 5)(x^2 + ax + b)$
2. $ax^3 + x^2 - bx + 1 = x(x^2 + 2x) + x(1 - x) + 1$
3. $a(x + 2)^2 + b(x + 1) - 16 = 3x^2 + 16x$

Exercice 3

Soit le polynôme P défini par :
$P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$.

1. Montrer que $P(x)$ est factorisable par $x - 1$.
2. Factoriser complètement P.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$ puis $P(x) \geq 0$.

Exercice 4 Polynôme auxiliaire

On considère le polynôme P définie par :
$P(x) = -x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12$.

1. Montrer que 3 et -2 sont des racines de P.
2. En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que :$P(x) = (x^2 - x - 6)Q(x)$.
3. Déterminer le polynôme Q.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^4+4x^3+x^2-16x + 12 = 0$.
   En déduire les solution de l'équation :
   $-\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + 4\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 16\left(\frac{x-1}{x}\right) + 12 = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
   $-x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12 < 0$

Exercice 5 Relation rentre les racines

On considère le polynôme P défini par :
$P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.
On note par $\alpha, \beta et \gamma$ ses (si elles existent).

1. Ecrire en fonction de $\alpha, \beta et \gamma$ la forme factorisée complète de $P(x)$.
2. Déterminer les valeurs exactes des expressions suivantes : $\alpha + \beta + \gamma$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$; $\alpha\beta\gamma$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

Exercice 6

On considère un polynôme
$P(x) = 4x^4 - 12x^3 + ax^2 + bx + c$.

1. Déterminer les réels a, b et c tel que $P(x)$ soit divisible par $x^2 - 2x - 8$ et que $P(0) = -8$.
2. Dans la suite, on prendra : $a = -23$, $b = 30$ et $c = -8$.
   a. Factoriser $P(x)$ en un produit de facteurs du premier degré.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$ puis
      $P(|x - 2|) = 0$.
3. On pose : $h(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 3x + 2}$
   a. Déterminer l'ensemble de définition D_h de h.
   b. Simplifier si possible $h(x)$.
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $h(x) \geq 0$.

Exercice 7

On considère le polynôme P donné par : $P(x) = ax^3 + bx^2 - 37x - c$ où a, b et c sont des réels

1. Déterminer les réels a, b et c sachant que le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x^3 - 5x + 1$ est $-2x^2 - 22x - 15$.
2. Dans la suite on prendra $a = 3$, $b = -2$ et $c = 12$.
   a. Calculer $P\left(-\frac{1}{3}\right)$ puis factoriser $P(x)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \leq 0$.
3. Déduire de la question 2), une résolution de :
   a. $P(x^2 + 1) = 0$
   b. $P(1 - 3x) \leq 0$

Exercice 8 Calcul de $1 + 2 + 3 + \cdots + n$

1. Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 2 vérifiant : $P(x) - P(x-1) = x$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
2. En donnant successivement à x les valeurs $1, 2, 3, \cdots, n$ dans la relation ci-dessous et en faisant la somme membre à membre des n relation obtenues, exprimer la somme $1+2+3+\cdots+n$ (somme des n premiers entiers naturels non nuls) en fonction de n.

✍ Exercice 9 Calcul de $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$

1. Démontrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 qui s'annule en 0 et qui vérifie l'égalité suivante : $P(x) - P(x-1) = x^2$.
2. En déduire la somme : $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

✍ Exercice 10 Calcul de $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)$

1. Déterminer le polynôme P de degré 2 vérifiant la relation : $P(x) - P(x-1) = x^2 + x$.
2. En déduire en fonction de n la somme : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)$.

✍ Exercice 11

Trouver a et b dans chacun des cas suivants :

1. $x^5 + ax^4 + b$ soit divisible par $(x-1)^2$.
2. $3x^3 + ax^2 + bx - 1$ soit divisible par $(x+1)^2$.
3. $ax^7 + bx^6 - 1$ soit divisible par $(x-1)^2$.

✍ Exercice 12

Soient a, b et c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose $U = ab+ac+bc$ et $V = abc$.
Le but de cet exercice est de démontrer que :
$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right).$$

1. Montrer que $a^2+b^2+c^2 = -2U$.
2. Etablir que pour tout réel x : $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + Ux - aV$.
3. En déduire les égalités suivantes : $a^3 = V - aU$; $a^4 = aV - a^2U$ et $a^5 = -UV + aU^2 + a^2V$.
4. A l'aide des égalités précédentes, établir que : $a^3+b^3+c^3 = 3V$; $a^4+b^4+c^4 = 2U^2$ et $a^5+b^5+c^5 = -5UV$.
5. En déduire que : $$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right).$$

Exercice 1 Barycentre de trois points

Dans un triangle ABC, on défini I le barycentre de $(B,2),(C,1)$, J le barycentre de $(A;3),(C,2)$ et K le barycentre de $(A,3)$ et $(B,4)$.

1. Faire une figure.
2. On considére G le barycentre de $(A,3),(B,4)$ et $(C,2)$, montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

Exercice 2

A, B, C et D sont quatre points tel que trois quelconque d'entre eux ne soient pas alignés.
$G = bar\{(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)\}$. On désigne par K le milieu de $[AD]$ et L celui de $[BC]$. Soit I et J les barycentres respectifs des systémes $\{(A,1),(B,2)\}$ et $\{(C,2),(D,1)\}$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que G est le milieu de $[IJ]$.
3. Démontrer que les points G, K et L sont alignés.

Exercice 3

$ABCD$ est un quadrilatére, I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$ et G est le centre de gravité du triangle ABC.
On considére les points L et K tels que :
$L = bar\{(A,1),(D,3)\}$ et $K = bar\{(C,1),(D,3)\}$.

1. Faire une figure en y plaçant les points.
2. Soit H tel que :
   $H = bar\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,3)\}$.
   a. Montrer que H est le barycentre de G et D affectés des coefficients á préciser.
   b. Montrer que H est le barycentre de J et L affectés des coefficients á préciser.
   c. Montrer que H est le barycentre de I et K affectés des coefficients á préciser.
3. Déduire de la question 2) que les droites (GD), (JL) et (IK) sont concourantes en un point commun que l'on déterminera.

Exercice 4

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan, $E = bar\{(A,-1),(B,2),(C-3)\}$, F est le milieu du segment $[ED]$, $G = bar\{(A,1),(D,2)\}$ et $H = bar\{(B,2),(c,-3)\}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que F est le barycentre de $(A,-1),(B,2),(C,-3)$ et $(D,-2)$.
3. Prouver que les points G, F et H sont alignés.
4. Prouver que F est le barycentre des points G, B et C munis des coefficients á préciser.
5. a. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-6\overrightarrow{MC}\right\|$.
   b. Exprimer $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$.
   c. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-6\overrightarrow{MC}\right\|$.
   d. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
   $-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$.

Exercice 5 Barycentre de trois points

Soit A, B et C trois points du plan a, b et c trois réels tels que : $a+b+c=0$. Soit G le barycentre de $(A,a),(B,b)$ et (C,c).

1. Démontrer que le systéme
   $\{(1,2a+1),(B,2b-2),(C,2c+1)\}$
   admet un barycentre que l'on notera K.
2. Déterminer une relation vectorielle qui définie K.
3. En déduire que :
   $$a\overrightarrow{KA}+b\overrightarrow{KB}+c\overrightarrow{KC} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}}{2}.$$
4. En déduire que G et K sont confondus si B est le milieu de $[AC]$.
5. En supposant que les points A, B et C ne soient pas alignés. Soit E le point vérifiant que $ABCE$ soit un parallélogramme.
   a. Montrer que : $\overrightarrow{GK} = \frac{\overrightarrow{BE}}{2(a+b+c)}$ en utilisant la question 2).
   b. Construire G et K pour $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = 2$.

Exercice 1

1. Exprimer en fonction des produits scalaires : $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}^2$ et $\vec{v}^2$.
   a. $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$.
   b. $(\vec{u}-2\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$.
   c. $\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v})-2\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v})+(\vec{u}+3\vec{v}).\vec{v}$.
2. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=7$ et $\vec{u}.\vec{v}=13$. Calculer :
   a. $\vec{u},2\vec{v}$.
   b. $\vec{u}.(\vec{u}+3\vec{v})$.
   c. $(\vec{u}+3\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})$.
3. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-7$. Démontrer que les vecteurs $(\vec{u}+2\vec{v})$ et $(\vec{v}-\vec{u})$ sont orthogonaux.

Exercice 2

1. Construire un triangle ABC tels que : $AB=BC=5cm$ et $\widehat{ABC}=60°$.
2. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
3. Montrer que : $AC^2=AB^2+BC^2-2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$. En déduire la distance BC.
4. Calculer d'une autre méthode : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que : $AB=\sqrt{7}$, $AC=5$ et $BC=2$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=14$.
2. Montrer que : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.
3. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Calculer la distance AH.
4. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Calculer la distance AI.
5. On considére le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{12}{25}\overrightarrow{AC}$.
   a. Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$.
   b. Montrer que les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 4

Donner la nature de l'ensemble (E) dont on donne une équation cartésienne :

1. $x^2+y^2-4x-4y+1=0$
2. $x^2+y^2-2x+1=0$
3. $3x^2+3y^2+15x-12y=0$
4. $x^2+y^2-2x-6y-3=0$
5. $x^2+y^2+2mx-2y+4=0$
6. $x^2+y^2+2x+2y+6-m^2=0$

Exercice 5

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
On prendra AB=$6cm$.

1. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$
2. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}$
3. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=3$
4. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=-2$
5. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$
6. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=16$
7. $MA^2+MB^2=30$
8. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$=$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$
9. $MA^2-MB^2=16$
10. $\frac{MA}{MB}=\frac{4}{3}$

Exercice 6

ABC est un triangle tel que $AB=6$, $AC=4$, $BC=3$ et I est le milieu de $[AB]$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire $\cos\widehat{BAC}$.
   b. Calculer CI.
2. Soit E=$\{M\in P, MA^2+MB^2=36\}$.
   a. Montrer que $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$
   b. Déterminer et construire alors E.
3. Soit F=$\{M\in P, MA^2-MB^2=7\}$.
   a. Montrer que $C\in F$.
   b. Montrer que : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$.
   c. Déterminer et construire alors F.
4. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Montrer que $IH=\frac{7}{12}$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repére orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Identifier l'ensemble E d'équation : $x^2+y^2-4x+2y-5=0$.
   Etudier l'intersection de E et la droite (D) d'équation : $x-2y+1=0$.

2 Identifier l'ensemble E_1 d'équation : $x^2+y^2+2x-4y-13=0$ et E_2 d'équation $x^2+y^2-6x+4y+11=0$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de E_1 et E_2.

✍ Exercice 8

ABC est un triangle tels que $AB=c$, $AC=b$ et $BC=a$.

1 Démontrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}=BC^2$.

2 En déduire que $a=b\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{B}$. Puis deux autres formules analogues.

3 Démontrer que $\sin\widehat{A}=\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{C}\cos\widehat{B}$. En déduire que : $\sin(\widehat{B}+\widehat{C})=\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{C}\cos\widehat{B}$.

✍ Exercice 9

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $3cm$.

1 **a** Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$.

b Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$.

c En déduire que les droites (BD) et (BC) sont perpendiculaires.

d Vérifier que $CD=6$ et $\widehat{ACD}=\frac{2\pi}{3}$.

e Calculer AD^2 puis en déduire AD.

2 Soit $G=bar\{(A;2),(B;1),(C;1)\}$ et I le milieu de $[BC]$.

a Montrer que G est le milieu de $[AI]$.

b Vérifier que $GA^2=\frac{26}{16}$ et $GB^2=GC^2=\frac{63}{16}$.

c Montrer que $\forall M\in P$: $2MA^2+MB^2+MC^2=4MG^2+\frac{45}{4}$.

En déduire l'ensemble des points M du plan : $\Delta=\{M\in P, 2MA^2+MB^2+MC^2=\frac{81}{4}\}$.

✍ Exercice 10

On considére un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB=5$, $AD=4$ et I est le milieu de $[AD]$ et H le projeté orthogonal de D sur (AB).

1 Calculer $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$.

2 Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. En déduire AH.

3 Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AD^2-\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}$.

4 En déduire $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{DA}$ et $\cos(\widehat{BDA})$.

5 **a** Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MA^2+MD^2=2MI^2+8$.

b Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+MD^2=16$.

✍ Exercice 11

Soit (C) un cercle de centre Ω et un point M exteérieur á ce cercle. Une droite quelconque (D) passant par M coupe (C) en deux points A et B.

On se propose de démontrer que le réel $MA\times MB$ est indépendant de (D).

Ce nombre est appelé puissance du point M par rapport au cercle (C).

1 Soit r le rayon de (C), (T) une tangente á (C) passant par M et T le point de contact. Démontrer que : $MT^2=M\Omega^2-r^2$.

2 Soit A et B les points d'intersection avec (C) d'une droite passant par M et A' le point diamétralement opposé á A sur (C).

a Démontrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.

b En déduire que : $MA\times MB=M\Omega^2-r^2$.

✍ Exercice 12

Soient A et B deux points distincts du plan et un réel k $(k>0)$. On pose $AB=a$.

1 Déterminer l'ensemble des points ϵ_1 des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=1$. On suppose que $k\neq 1$.

2 Démontrer que $\frac{MA}{MB}=k\Leftrightarrow MA^2-k^2MB^2=0$.

3 Soit $G=bar\{(A,1);(B,-k^2)\}$.

a Montrer que : $MA^2-k^2MB^2=0\leftrightarrow MG^2=\frac{k^2GB^2-GA^2}{1-k^2}$.

b Calculer GA^2 et GB^2 en fonction de k et a.

c En déduire que : $MG^2=\frac{k^2}{(1-k^2)^2}a^2$.

d Quel est l'ensemble ϵ_k des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=k$.

4 Soit $G_1=bar\{(A,1);(B,k)\}$ et $G_2=bar\{(A,1);(B,-$

a Démontrer que : $MA^2-k^2MB^2=0\leftrightarrow\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0$.

b Quel est alors l'ensemble ϵ_k des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=k$.

✍ Exercice 13

Dans le plan P, on donne les points A, B et C tels que : $AB=AC=5$ et $BC=6$.

1 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2 Soit $G=\text{bar}\{(A,2);(B,3);(C,3)\}$.

a Construire G.

b Calculer la distance GA.

3 Soit f l'application de P dans $\mathbb{R}$ qui á tout point M fait correspondre le réel : $f(M)=2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

4 Démontrer que : $f(M)=f(G)+4MG^2$, pour tout point M du plan.

5 Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

6 Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=f(A)$.

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-5x+15}{8x^2-5x-3}$
2. $f(x) = \frac{4x^2-5x+15}{x^3+6x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-18}$
4. $f(x) = \sqrt{4x-x^3}$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{-x^2+x-1}}$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{-4x+1}}{x+2}$
7. $f(x) = \frac{x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$
8. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{(x-2)(x+3)}$
9. $f(x) = \frac{\sqrt{(1-x)(2+x)}}{x^2+x}$
10. $f(x) = \sqrt{|x-1|-2}$
11. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{|2x-5|-2}$
12. $f(x) = \sqrt{|1-3x|-x+2}$
13. $f(x) = \frac{4x^2-1}{6x^2-|13x-5|}$
14. $f(x) = \frac{\sqrt{2-3x}+1}{|x|-1}$
15. $f(x) = \frac{x^2+2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}}$
16. $f(x) = \frac{1}{|x|+x}$
17. $f(x) = \sqrt{3-|2x+5|}$
18. $f(x) = \sqrt{2x+1-\sqrt{7-6x}}$
19. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-E(x)}$
20. $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2-1} \; si \; x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x-1} \; si \; x > 0 \end{cases}$
21. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{|x^2-2x|}+x \text{ si} x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$
22. $\begin{cases} f(x) = |x+1| - \frac{2}{x+2} \; si \; x < 0 \\ f(x) = x^2\sqrt{4-x} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$
23. $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x}\right|} \; si \; x < 0 \\ f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2+1} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$
24. $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{-x}+1 \; si \; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1-x}{1+x^3} \; si \; x > 0 \end{cases}$
25. $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x-2)}{x-1} \; si \; x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{|x^2-4|} \; si \; s \geq 0 \end{cases}$
26. $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{|x+1|-2} \; si \; x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x-3} \; si \; x > 1 \end{cases}$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dites si f est une application

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2-1}-1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x - \sqrt{x}$

$f : [2;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{x-2}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto f(x) = E(x)$

Exercice 3 Egalité de deux fonctions

1. Soit les fonctions $f(x) = \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2}$ et $g(x) = x-1$.
   a. Vérifier que : $(x^2+2)(x-1) = x^3-x^2+2x-2$
   b. Montrer que f et g sont égales.
2. Soient $f(x) = 2x+1+\dfrac{20}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.
   Montrer que les fonctions f et g sont égales.
   Dans chacun des cas suivants déterminer les réels a et b pour que les fonctions f et g soient égales.
3. $f(x) = -2x^2-12x-16$ et $g(x) = -2(x-a)^2+b$.
4. $f(x) = \frac{x+7}{x^2+2x-3}$ et $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x-1|+2|3-x|$.
Déterminer l'application affine g qui a même restriction que f sur l'intervalle $[1;3]$.

Exercice 5

Soient f et g des fonctions définies par $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition et l'expression des fonctions suivantes : $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ et $3f-2g$.
2. Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ puis comparer $f \circ g$ et $g \circ f$; Que peut-on en déduire ?

✍ Exercice 6 Composition et décomposition

1 On conssidére les fonction suivantes :
$f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$

a Déterminer D_f, D_g, $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$.

b Calculer $f\circ g(x)$ et $g\circ f(x)$.

2 Trouver deux fonctions f et g telles que $h(x) = (f\circ g)(x)$.

a) $h(x)=\sqrt{x^2+3x+4}$	d) $h(x)=\frac{x^2+7}{x^2-2}$
b) $h(x)=(3x+1)^2$	e) $h(x)=(x+5)^2+4$
c) $h(x)=\frac{3}{x^2-5x+6}$	f) $h(x)=\frac{1}{x-1}$

✍ Exercice 7 Etude de la parité d'une fonction

Etudier la parité des fonctions suivantes :
a) $f(x) = 2x^4 + x^2 - 1$; *b)* $f(x) = x^3 + x$
c) $f(x) = x^2 - 3|x| + 1$; *d)* $f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$
e $f(x) = \frac{x^3}{|x^4-x^2+1|}$; *f)* $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{4+x^2}}$
g) $f(x) = \frac{\sin x}{2+\sin^2 x}$; *h)* $f(x) = \frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$
i) $f(x) = \frac{x+1}{1-x^2}$

✍ Exercice 8

1 Dans chacun des cas suivants, étudier la périodicité des fonctions numériques et préciser et d'en préciser la période.
a) $f(x)=\sin x$; *b)* $f(x)=\cos x$; *c)* $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$; *d)* $f(x)=\cos 2x \sin 3x$; *e)* $f(x)=x - E(x)$; *f)* $f(x)=[2x-E(2x)]\sin 3\pi x$; *g)* $f(x)=\frac{\cos \pi x}{x-E(x)}$

2 Soit la fonction numérique f telle que :
$f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.
Calculer ; $f(x+4)$, $f(x+6)$, $f(x+8)$ en fonction de $f(x)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

✍ Exercice 9 Etudier le sens de variations de f.

1. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; 2. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$; 4. $f(x) = \sqrt{x^3+x}$
5. $f(x) = x^3 - 3x$; 6. $f(x) = \sqrt{x^3-x}$
7. $f(x) = |x+1| - |x-1| + |2x|$

✍ Exercice 10 Elément de symétrie

1 Dans chacun des cas, montrer que (C_f) admet la droite (Δ) pour axe de symétrie.

a $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $(\Delta) : x = -1$

b $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$ et $(\Delta) : x = \frac{2}{3}$

c $f(x) = \frac{-2x^2+4x-1}{(x-1)^2}$ et $(\Delta) : x = 1$

d $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$ et $(\Delta) : x = -2$

2 Dans chacun des cas suivants, montrer que (C_f) admet le point K pour centre de symétrie.

a $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ et $K(2;1)$

b $f(x) = -x^3 + 3x + 4$ et $K(0;4)$

c $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$ et $K(2;1)$

d $f(x) = \frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4+1}$ et $K(1;1)$

e $f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1}$ et $K(-2;0)$

✍ Exercice 11

On considére la fonction f définie par : $f(x) = x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

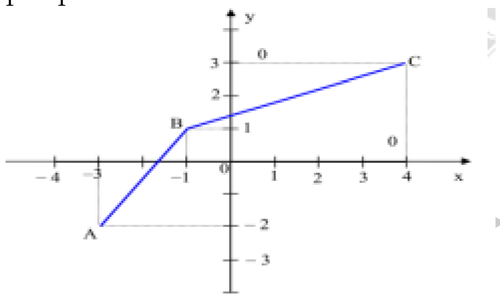
1 Démontrer que $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.

3 Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

✍ Exercice 12

Soit l'application f définie par sa représentation graphique ci-dessous



1 Trouver l'image directe par f des intervalles suivants :$[-3;-1]$; $]-1;4]$ et $\{-3;-1\}$

2 Trouver l'image réciproque par f des intervalles suivants :$]1;3[$; $]-\infty;-3]$ et $[-2;3]$.

3 Donner les formules explicites de $f(x)$.

4 Montrer que f est bijective.

✍ Exercice 13

Soient les fonctions f et g définies respectivement par :

$$f : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{1\}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$g : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}_+^*, \quad x \mapsto f(x) = 3x - 2$$

1 Les fonctions f et g sont-elles bijectives ?

2 Calculer : $f\circ g(0)$, $g\circ f(0)$, $f\circ g(x)$ et $g\circ f(x)$.

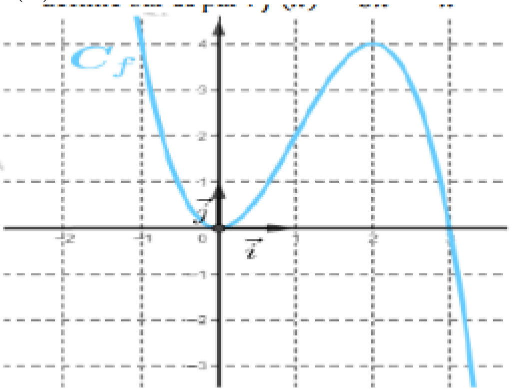
3 Trouver $f([-2;-1])$; $g([-2;0])$; $f^{-1}([2;3[)$ et $f^{-1}(]-\infty;0[)$.

4 FRésoudre l'équation $g(x) = g(x)$.

5 Sur quel intervalle I, f et g se rencontrent-elles ?

✍ Exercice 14

La courbe tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3x^2 - x^3$.



1. Dessiner la courbe représentative de la fonction g définie par : $g(x) = f(x) - 1$.
2. Soit h la fonction définie par : $h(x) = f(x-2)$.
   - a. Dessiner la courbe représentative de la fonction h.
   - b. Donner l'expression de $h(x)$.
   - c. Etablir le tableau de variation de la fonction h.
3. Soit z la fonction définie par :$z(x) = |f(x)|$.
   - a. Donner l'expression de $z(x)$.
   - b. Etablir le tableau de variation de la fonction z.

✍ Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est injective, surjective ou bijective.

1. $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}-\{2\} & \to & \mathbb{R}-\{2\} \\ x & \mapsto & f(x) = \frac{2x+1}{2x-4} \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} f : \left[\frac{1}{2};+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \sqrt{2x-1} \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array}$
4. $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & f(x) = 2x - 3 \end{array}$

✍ Exercice 16

Soit la correspondance :
$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \sqrt{|1-x^2|} \end{array}$

1. Justifier que f est une application.
2. Soit g la restriction de f sur $[1;+\infty[$
   - a. Montrer que $g(x)=\sqrt{x^2-1}$.
   - b. Déterminer l'image directe par g de $A = \{1;2;3\}$.
   - c. Déterminer l'image réciproque par g de $B =]1;4]$.
   - d. Montrer que g est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J á préciser.
   - e. Déterminer $g^{-1}(x)$.
3. On définit la fonction h par $h(x)=\frac{x+1}{x-3}$.
   - a. Déterminer $D_{g\circ h}$ et $D_{h\circ g}$.
   - b. Expliciter $g \circ h(x)$.

✍ Exercice 17

Soient $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ et $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Etudier la parité de f.
3. Montrer que $I(1;1)$ est un centre de symétrie de (C_f).
4. Montrer que $\forall x_1;x_2$ deux réels distincts , $f(x_1;x_2)=\frac{2(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$.
5. En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty;-1]$, sur $[-1;1]$ et sur $[1;+\infty[$.
6. Montrer que $\forall x_1;x_2 \in \mathbb{R}-\{\nVdash\}$ deux réels distincts , $\Delta g(x_1;x_2)=\frac{2}{(1+x_1)(1+x_2)}$.
7. En déduire le sens de variations de g sur $]-\infty;_1]$ et sur $]1;+\infty[$.
8. Déterminer $D_{g\circ f}$.
9. Montrer que $\forall x \in D_{g\circ f}$, $g\circ f(x)=-f^2(x)$.

✍ Exercice 18

Soit f et g les fonctions définies par :
$f(x) = -5x + 3$ et $g(x) = \frac{4x^2+1}{x^2+2}$.

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 4$.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-17 \leq f\circ g(x) \leq \frac{1}{2}$.

✍ Exercice 19

Soient E, F et G des ensembles non vides. On considére les applications suivantes $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que $g\circ f$ injective implique que f est injective.
2. Montrer que $g\circ g$ injective et f surjective implique que g est injective.
3. Montrer que $g\circ f$ surjective sur G implique que g est surjective sur G.
4. Montrer que $g\circ f$ surjective sur G et g injective implique que f est surjective sur F.

✍ **Exercice 1** Calculer les limites suivantes

1 $\lim\limits_{x\to 0} -x^2-2x+4$

2 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x-3}$

4 $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

5 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{2x^2+6x}$

6 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{-x}-\sqrt{5}}{x+5}$

7 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2+4x-5}$

8 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-4x^2-6x+24}{x-4}$

9 $\lim\limits_{x\to +\infty} -5x^3-3x+4$

10 $\lim\limits_{x\to -\infty} -4x^3+7x^2+3$

11 $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^4-3x^2+7$

12 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-5x+2}{2x+5}$

13 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+7}{x^2+5}$

14 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+2x+4}{x^2-5x+1}$

15 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-x+1}{2x^2-5x+1}$

16 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+3x+2}}{2x+3}$

17 $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+4x+3}-3x$

18 $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

19 $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x-\sqrt{x^2+3x-1}$

20 $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x-1-\sqrt{9x^2-3}$

21 $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+3x+7}-x$

22 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

23 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{-2x+5}$

24 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x}$

25 $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x-1)^2(x-5)^3$

26 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$

27 $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

28 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

29 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x+3}$

30 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}}$

31 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

32 $\lim\limits_{x\to \pm\infty} [\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x)]$

33 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$

34 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$

35 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+3}}{x-2}$

36 $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

37 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}}$

38 $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$

39 $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

40 $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x-\sqrt{|x|}}{3x+2}$

✍ **Exercice 2** **Limites trigonométriques**

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin x}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x+\tan x}{\sqrt{x^2}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{1-\sqrt{x+1}}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{x^2+x^3}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin^2 x-\cos x+1}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

13 $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 \pi x}$
15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$
16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x-\frac{\pi}{6}}$
17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x-1}{\cos x-\cos x}$
18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x}$
19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$
20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

✍ Exercice 3

Calculer la limite á gauche et la limite á droite de f e, x_0 ; f admet-elle une limites en x_0.

1 $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} & si x > 1 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

2 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{x-2} & si \quad x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{4\sqrt{2x}-8} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ et $x_0 =$ 2

3 $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3+1}$ et $x_0 = -1$.

✍ Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-2}$

1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2 Étudier les limites aux bornes de D_f.

3 En déduire que la droite (D) d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale á (C_f).

4 Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

- **a** Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 3$ est une asymptote oblique á (C_f).
- **b** Etudier la position relative de (C_f) par rapport á (Δ).

✍ Exercice 5 Théoréme des gendarmes

1 Montrer que : $\forall x \in [1; +\infty[$, $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$. En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

2 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x + \cos x| \leq 2$. En déduire $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x + cosx}{x^2}$

3 Montrer que : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{1}{2}$

4 En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3}{1-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x \tan x}$

✍ Exercice 6 Théoréme des gendarmes

A) On considére la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

1 Montrer que sur $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

2 En déduire que : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

B) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1 Justifier que pour tout réel positif, on :

- **a** $x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x+1)^2$
- **b** $x \leq \sqrt{x^2+x+1} \leq x + 1$

2 En déduire que $\forall x > 0$, $1 - \frac{1}{x+1} \leq g(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3 En utilisant le théoréme des gendarmes, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

✍ Exercice 7

Etudier la continuité de f en x_0 donné.

1 $\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 & si \quad x \leq -1 \\ f(x) = \dfrac{2x+2}{x+2} & si \quad x > -1 \end{cases}$ $x_0 = -1$

2 $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} & si \quad x \leq -1 \\ f(x) = \sqrt{1+x} & si \quad x > -1 \end{cases}$ et $x_0 = -1$

3 $\begin{cases} f(x) = -x - 1 - \sqrt{x^2-2} & si \quad x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{2x^2+3x-11}{x-3} & si \quad x < 2 \end{cases}$ $x_0 = 2$

✍ Exercice 8

1 Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} & si \quad x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + kx + 1 & si \quad x < 2 \end{cases}$ Déterminer k pour que f soit continue en 2.

2 Déterminer a et b pour que f soit continue sur D_f.

$\begin{cases} f(x) = a^2x^2 + 5x + a & si \quad x < 1 \\ f(x) = 5x + 2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ f(x) = ax + 2ab & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) = -2x - 5 & si \quad x < -2 \\ f(x) = x^2 + ax + b & si \quad -2 \leq x < 1 \\ f(x) = -x + 6 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

✍ Exercice 9 Prolongement par continuité

Dans chacun des cas suivants, dites si f est prolongeable par continuité en a. ;

1 $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$, $a = 2$

2 $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $a = 0$

3 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$, $a = 0$

4 $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x}$, $a = 0$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}$, $a = 1$

6 $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x-1}$, $a = 1$

✍ Exercice 10

Etudier la dérivabilité de f en x_0

1 $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = -2$

2 $f(x) = (1-x)\sqrt{x-1}$, $x_0 = 1$

3 $f(x) = x^2 + |+2|$, $x_0 = -2$

4 $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$, $x_0 = 0$

5. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} & si \quad x < -1 \\ f(x) = x^2 - 1 & si \quad x \geq -1 \end{cases}$ $x_0 = -1$

6. $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{3-x} & si \quad x \leq 3 \\ f(x) = (x-3)\sqrt{x-3} & si \quad x > 3 \end{cases}$ $x_0 = 3$

✍ Exercice 11

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{-x-1} & si \quad x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = x^2 - 1 & si \quad x \in]-1; 1] \\ f(x) = 2\sin(x-1) & si \quad x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -1 et 1.
2. Etudier la dérivabilité de f en -1 et 1.
3. Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer la fonction dérivée de f.

✍ Exercice 12

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{(x-1)(|x|+1)} & s \quad x \neq 1 \\ f(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$ et $x = 1$.

✍ Exercice 13 Fonction dérivée

Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$
2. $f(x) = -5x^3 + 2x + 1$
3. $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)(-6x + 7)$
4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
5. $f(x) = (-3x^2 + 2x)^4$
6. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$
7. $f(x) = -\frac{3}{x^2-4}$
8. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x^2+3x-5}$
9. $f(x) = \frac{1}{(4-5x)^3}$
10. $f(x) = \sqrt{3x-4}$
11. $f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1}$
12. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
13. $f(x) = \left(\frac{3x-1}{2x+4}\right)^4$
14. $f(x) = (2x-1)^2(4-3x)^3$
15. $f(x) = \cos(3x+5)$
16. $f(x) = \sqrt{\cos x}$
17. $f(x) = \frac{1+\cos x}{\cos x - 3}$
18. $f(x) = \tan^2 x + \cos^2 x$
19. $f(x) = (x^2 - x)\sqrt{-x^2+9}$
20. $f(x) = \sqrt{\frac{3x+7}{x^2+2x+1}}$

✍ Exercice 14

1. Soit la fonction $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.
   Déterminer les réels a et b tels que la courbe (C_f) passe par $A(0; 3)$ et admet en ce point une tangente d'équation : $y = 4x + 3$
2. Soit la fonction $g(x) = ax + b + \frac{1}{x}$.
   Déterminer les réels a et b pour que la courbe (C_g) passe par le point $A(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2} - 1)$ et admette en ce point une tangente parralléle á l'axe des abscisses.
3. Déterminer les réels a, b et c pour que l'hyperbole (H) d'équation $y = \frac{ax+b}{x+c}$ ait le point $\Omega(-1; 2)$ comme centre de symétrie et admette au point d'abscisse 1, une tangente parralléle á la droite (D) d'équation $y = -x$.

✍ Exercice 15 TVI

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire le tableau de variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
4. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} près de chacune des ces solutions.

✍ Exercice 16

1. Soit la fonction g définie par : $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$.
   - a. Etudier les variations de g.
   - b. Montrer qu'il existe un unique réel α $(0,7 \leq \alpha \leq 0,8)$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$ et (C_f) sa courbe représentative.
   - a. Etudier les limites de f aux bornes de D_f puis étudier les branches infinies de (C_f).
   - b. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
     En déduire les variations de f.

✍ Exercice 17

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} & si \quad |x| > 1 \\ f(x) = x^2 - 3x + 2 & si \quad |x| < 1 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f.
2. Peut-on prolonger f par continuité en 1 ? En -1 ? Si oui préciser le prolongement par continuité.
3. Montrer que la fonction g, restriction de f à l'intervalle $]-1; 1[$ définit une bijection de $]-1; 1[$ vers un intervalle J à préciser.
4. g^{-1} est-elle dérivable en $\dfrac{3}{4}$? Justifier.
5. Déterminer $g^{-1}(x)$.

IA Dakar — **Année scolaire 2022 – 2023**

TD N°7 ETUDE DE FONCTIONS

ME ATHENA SEDAR — **1S2**

Exercice 1

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C_f).
4. Déterminer les réels a, b et c tels : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{2x-1}$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique (Δ) dont on précisera une équation
5.
   a. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
6. Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.
7. Déterminer les coordonnées de points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.
8. Construire (C_f) ainsi que les asymptotes.
9.
10. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.
    a. Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J. à préciser.
    b. On note h^{-1} sa bijection réciproque. h^{-1} est-elle dérivable sur J ? puis dresser le tableau de variation de h^{-1}.
    c. Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans un même repère.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{4x^2-8x}{x^2-2x-3}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f puis préciser les asymptotes éventuelles.
   a. Calculer la fonction dérivée f' de f.
   b. Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (C_f) au point A d'abscisse $x_0 = 5$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère.
5. Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à son asymptote horizontale.
6. Montrer que f admet une réciproque notée f^{-1} de $]-1;1]$ vers un intervalle J à préciser.
7. Tracer la tangente (Δ), les asymptote et la courbe (C_f).

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2-6x+5|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Déterminer D_f puis écrire f sans valeur absolue.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3.
   a. Etudier la continuité de f en 1 et en 5.
   b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et 5 puis interpréter graphiquement le résultat.
4.
   a. Calculer la dérivée $f'(x)$ puis étudier son signe.
   b. En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ $\forall x \in D_f$.
5. Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est un centre de symétrie de (C_f).
6. Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x-3$ et $y = -x+3$ sont des asymptotes obliques à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Déterminer les coordonnées des points A et B, intersection de (C_f) avec les droites (D_1) et (D_2), A étant le point dont l'abscisse supérieur à 3.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$

1 Déterminer les réels a et b tels que (C_f) passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

2 On suppose que $a = 1$ et $b = -1$.

a Déterminer les limites aux bornes de D_f. Préciser les asymptotes éventuelles.

b Déterminer les réels α, β et c tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{c}{x-1}$. En déduire que la droite $(D) : y = x + 2$ est une asymptote oblique à (C_f).

c Etudier les variations de f.

d Dresser le tableau de variation.

e Tracer la courbe (C_f).

✍ Exercice 5

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

1 a Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b Calculer $[\lim\limits_{x \to} f(x) - (x+4)]$. Interpréter graphiquement le résultat.

2 a Montrer que f est continue et 0, en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b Etudier la dérivabilité de f en 0, en déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c Calculer $f'(x)$ $\forall x \in D_f$.

d Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

3 Soit g a restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

a Montrer que g est bijective de $[1. + \infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une dans $[1; +\infty[$ une seule solution.

c En déduire le signe de f sur $[1; +\infty[$.

4 Tracer (C_f) la courbe de f.

✍ Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}\,)$, on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{4x^2}{x+1} & si \quad x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+x+2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

1 Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

3 Démontrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = 4x - 4$ et $y = x + \frac{1}{2}$ sont des asymptotes obliques à (C_f) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

4 Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable. Etudier son signe.

5 Dresser le tableau de variation de f.

6 Construire la courbe (C_f) de f.

7 Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$.

a Montrer que g est bijective de I vers un intervalle J à déterminer.

b Calculer $g(2)$. En déduire $(g^{-1})'(2\sqrt{2})$.

c Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ sur J.

d Construire les courbes (C_g) et $(C_{g^{-1}})$.

✍ Exercice 7

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3x+3} & si \quad x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2-2x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1 a Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer les limites aux bornes de D_f.

b Montrer que les droites $(D) : y = x + 3$ et $(D'); y = -2x + 1$ sont des asymptotes à la courbe de f respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

c Etudier la position relative de (C_f) par rapport aux asymptotes éventuelles.

2 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3 a Calculer $f'(x)$ sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

b Présenter le tableau de variations de f.

4 Tracer les asymptotes, les demi-tangentes et la courbe (C_f) de f.

5 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$.

a Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

b Soit g^{-1}, la bijection réciproque de g. Calculer $g^{-1}(1)$. En déduire que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

c Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le même repère.

✍ Exercice 8

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{|x^2-x|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}\,)$ d'unité (1 cm)

1 Déterminer le domaine de définition D_f de f

2 Déterminer les limites aux bornes de D_f puis en déduire la nature des branches infinies

3 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$ puis interpréter graphiquement les résultats

4 Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable.

5 Résoudre dans $]0;1[$, l'inéquation : $2\sqrt{x-x^2}+1-2x \leq 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;1[$, en déduire son signe sur les autres intervalles.

6 Dresser le tableau de variations de f.

7 Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ puis étudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]1;+\infty[$.

8 Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ puis étudier la position relative de (C_f) et (D) sur $]-\infty;0[$.

9 Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a Montrer que g définie une bijection de $I =]1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b La bijection réciproque g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $(g^{-1})'(2)$

c Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

10 Construire (C_f), ainsi que $(C_{g^{-1}})$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

✍ Exercice 8

1 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^3 + 3x - 1$

a Dresser le tableau de variations de u.

b Montrer que l'équation $u(x) = 1$ admet une solution unique α et que $0 < \alpha < 1$.

c En déduire le signe de $u(x) - 1$ sur $\mathbb{R}$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1} & si\ x < 1 \\ f(x) = 1 + \sqrt{2x-1} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats.

b Etudier la nature des branches infinies de f.

3 **a** Montrer que pour tout $x \in]-\infty;1]$, $f'(x) = \frac{2[u(x)-1]}{(x^2+1)^2}$.

b Calculer $f'(x)$ pour $x \in [1;+\infty[$ puis étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c Dresser le tableau de *variations* de f.

4 Construire la courbe représentative (C_f) de f.

5 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$. Montrer que g^{-1} est dérivable en 4 puis calculer $(g^{-1}) - (4)$.

✍ Exercice 9

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

1 Etudier les variations de g.

2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.
Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

3 En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x}\right|} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x^3-x^2}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire f sans valeur absolue.

2 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 1.

3 Etudier les branches infinies et la position relative de la courbe par rapport aux éventuelles asymptôtes.

4 Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.

5 Montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ sur $[0;+\infty[$?

6 Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

7 Tracer soigneusement (C_f) la courbe de f ainsi que les droites remarquables.

8 **a** Montrer que la restriction f_1 de f à $]-\infty;-1]$ est une bijection de $]-\infty;-1]$ sur un intervalle J à préciser.

b f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1 à est-elle dérivable sur J ? Si oui, calculer $f_1^{-1}(-2)$ puis $(f_1^{-1})'(-\sqrt{2})$.

c Donner les variations de f_1^{-1} puis donner son tableau de variations.

d Tracer $(C_{f_1^{-1}})$ la courbe de la fonction f_1^{-1}.

✍ Exercice 10

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f continue sur son ensemble de définition avec $f'_g(1) = 0$ et $f'_d(1) = -1$.
La courbe (C) de f coupe l'axe des abscisses en $A(-2; 0)$ et $B(-\frac{1}{2}; 0)$ et l'axe des ordonnées au point $C(0; 2)$.
La droite (D) : $y = x - 3$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et est en dessous de (C) sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

1 Déterminer le domaine de définition de f puis donner les limites aux bornes.

2 Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

3 Déterminer en justifiant toutes les asymptotes à la courbe de f.

4 Donner l'équation de chacune des demi-tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.

5 Tracer (D) et (C) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

6 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3; +\infty[$.

- **a** g est-elle bijective ? Justifier.
- **b** g^-1 est-elle dérivable en 2 ? Justifier.

7 Graphiquement, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ admet exactement 4 solutions réelles distinctes.

✍ Exercice 11

Soit f la fonction numérique satisfaisant aux conditions suivantes :

- Son ensemble de défionition est $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$
- $f'(x)$ est positive sur $]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$ et négative sur $]-1; 4[$.
- $f(0) = \dfrac{11}{4}$, $f(-1) = 3$, $f\left(\frac{5}{4}\right) = f(6) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x + 5) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$

En utilisant les renseignements ci-dessus

1 Dresser le tableau de variation de f.

2 Préciser les équations des asymptotes á (C_f).

3 La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = -1$? Justifier votre réponse.

4 Préciser les tangentes ou demi-tangentes á (C_f) que les renseignements vous donnent.

5 Représenter graphiquement la fonction f dans un repére orthonormé.

6 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 4} f \circ f(x)$.

IA Dakar — **Année scolaire 2022 – 2023**

TD n°8 ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

ME ATHENA SEDAR — $1S_2$

✍ Exercice 1

Mesure principale

Détermine la mesure principale de α :
$\alpha = \frac{37\pi}{4}$; $\alpha = \frac{103\pi}{6}$; $\alpha = -\frac{58\pi}{3}$: $\alpha = 153\pi$; $\alpha = -27\pi$; $\alpha = \frac{1047\pi}{3}$; $\alpha = -\frac{469\pi}{5}$; $\alpha = -\frac{1005\pi}{2}$; $\alpha = \frac{139\pi}{7}$; $\alpha = 1108\pi$; $\alpha = 713\pi$; $\alpha = -\pi$.

✍ Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de centre S tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$. Déterminer en radian et en degré les mesures principales des angles suivants : $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB})$; $(\overrightarrow{SA};\overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{SA};\overrightarrow{AB})$.

✍ Exercice 3

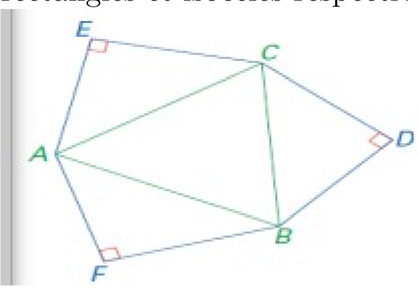
On conssidére les angles suivants :
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{63\pi}{4}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})=-\frac{221\pi}{12}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD})=-\frac{89\pi}{3}$.

1. Déterminer leurs mesures principales.
2. Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

✍ Exercice 4

I. Soit $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -\frac{\pi}{9}$ et $(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}) = \frac{\pi}{4}$. Déterminer la mesure principale de :
$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w})$; $(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$; $(-\overrightarrow{v};-2\overrightarrow{w})$ et $(-2\overrightarrow{u};\overrightarrow{w})$.

II. Dans la figure suivante, ABC est un triangle équilatéral direct, CBD, ACE et AFB sont des triangle rectangles et isocéles respectivement en D, E et F.



Déterminer la mesure principale des angles suivants : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BF})$; $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{CB})$.

✍ Exercice 5 **Calcul de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$**

1. Calculer $\cos x$ et $\tan x$ sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.
2. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sachant que $\cos(5\pi - x)=\frac{4}{5}$ et $x \in]0;\pi[$.
3. Calculer
4. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sachant que $\sin(-x)=\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $x \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[$.

✍ Exercice 6

Soient A, B et C les mesures principales des angles d'un triangles quelconque. Démontrer que :

1. $\sin(B+C)=\sin A$ et $\cos(B+C)=-\cos A$.
2. $\sin(2B+2C)=-\sin 2A$ et $\cos(2B+2C)=\cos 2A$
3. $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(\frac{A}{2}\right)$.

✍ Exercice 7

I. Montrer que les expressions A, B et C suivantes sont indépendantes de θ.
$A = (\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2$
$B = \sin^4\theta - \cos^4\theta + 2\cos^2\theta$
$C = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\cos\theta - b\sin\theta)^2$ avec a et b des réels.

II. Simplifier les expressions suivantes :
$A = \sin(\pi - x) + \cos(5\pi + x) - \sin(4\pi - x) + \cos(8\pi + x)$
$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x) + \sin(-x)$
$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} -\right) - \cos(-x + 2k\pi) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$
$D = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$
$E = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} - \tan\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}$
$F = \frac{-\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)+\sin(x+k\pi)}{\cos(3x-\pi)+\cos(k\pi+3x)+3\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)}$
$G = s\tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \tan\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + \cot x - \cot(\pi - x)$

✍ Exercice 8

Montrer les égalités suivantes
$(\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
$c\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4\sin x\cos x$
$(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$
$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x \quad \tan^2 a + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a\cos^2 a}$
$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$; $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$
$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$; $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$
$2\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$
$2\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos 2a - \cos 2b$
$\sin 3a\sin^3 a - \cos 3a\cos^3 a = \cos^3 2a$
$\cot^2 a - \cos^2 a = \cot^2 a\cos^2 a$; $\tan 2a - \tan a = \frac{\tan a}{\cos 2a}$
$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos a\cos 3a$; $\sin 2a = \frac{2}{\tan a + \frac{1}{\tan a}}$

✍ Exercice 9

I. En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que :

1. $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
2. Calculer $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$ sachant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$.
3. Déterminer par la même méthode $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

II.En utilisant la relation $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, démontrer que pour tout réel x.

1. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$
2. $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$

✍ Exercice 10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos 3x = \cos\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; $\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)=1$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\tan 2x = \tan\frac{\pi}{6}$

2. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ puis dans $]-\pi; \pi[$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; $4\cos^2 x - 3=0$

$\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2}=0$; $4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)=1$

$\cos^2 4x - \sin^2 3x=0$; $\sin 2x+\sin 3x=0$

$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3=0$; $\sin x=\cos 2x$

$\cos x + \sin x=\sqrt{2}$; $\cos 2x - \sin 2x=-1$

$\tan^2 x - 3\tan x - 1=0$; $\sqrt{3}\cos x - 3\sin x=0$

$\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$

3. Résoudre dans D les inéquations suivantes :

$\cos x \leq \cos\frac{\pi}{2}$ et $D = \mathbb{R}$; $2\cos x - 1 \geq 0$ et $D = \mathbb{R}$

$\cos x - \cos\frac{\pi}{6} \leq 0$ et $D =]-\pi; \pi[$

$\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$ et $D = [0; 2\pi[$

$\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$ et $D =]-\pi; \pi]$

$\cos x(2\sin x - 1) \leq 0$ et $D =]-\pi; \pi]$

$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$ et $D = [0; 2\pi[$

$\frac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}} \geq 0$ et $D =]-\pi; \pi]$

$\frac{2\cos 2x-1}{1+2\cos 2x} < 0$ et $D = [0; 2\pi[$

✍ Exercice 11

1 **a** Sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

b En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2 Retrouver autrement les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \cos 4x+\sin 4x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Préciser les solutions de (E) qui appartiennent á l'intervalle $[0; 2\pi[$.

4 Placer les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.

5 **a** Calculer $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$ de deux façons différentes.

b Déterminer l'expression de $\sin^2 2x$ en fonction de $\cos 4x$.

c En déduire que l'expression de : $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

✍ Exercice 12

Soit le polynôme défini par :
$P(x) = 8x^3 - 4\sqrt{2}x^2 - 2x + \sqrt{2}$.

1 Montrer que $P(x) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $P(x) = 0$ puis $P(x) \geq 0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $8\sin^3 x - 4\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{2} = 0$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $8\sin^3 x - 4\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{2} \geq 0$.

✍ Exercice 13

On se propose de résoudre l'équation (E) :
$\cos 3x - 7\cos 2x + 7\cos x - 1 = 0$.

1 Exprimer $\cos 2x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

2 Montrer que (E) est équivalente á : $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2X^3 - 7X^2 + 2X + 3 = 0$.

4 En désoudre les solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation (E).

✍ Exercice 14

1 a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que : $\cos a = \frac{1}{3}$ et $\sin b = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

a Calculer $\sin a$, $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\cos\frac{a}{2}$ et $\sin\frac{a}{2}$.

b Vérifier que $\cos b = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

c Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. En déduire $a + b$.

2 On donne : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

a Trouver la valeur exacte de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

b On pose :
$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$ et
$B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$
En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$. Calculer A et B.

3 x étant un réel non multiple de $\frac{\pi}{2}$.

a Démontrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

b Exprimer en fonction de $\cos 2x$: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ et $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$

IA Dakar — **Année scolaire 2022 – 2023**

TD N°9 SERIE D'EXERCICES SUR LES SUITES NUMERIQUES

ME ATHENA SEDAR — **1$^{\text{ère}}$S$_2$**

✍ Exercice 1

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer les quatre premiers termes.

1. $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+3}{U_n+1} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} W_1 = 2 \\ W_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}W_n + 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} V_0 = 1 \quad ; V_1 = 2 \\ V_n = 3V_{n-1} + V_{n-2} \end{cases}$

✍ Exercice 2 Raisonnement par récurrence

Démontrer par récurrence ses propositions suivantes :

1 $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3 $1+a+a^2+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

4 $U_n \leq 2$ avec (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n+2} \end{cases}$

✍ Exercice 3 Convergence de (u_n)

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{u_n+4}$.

2 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

3 Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

4 Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

✍ Exercice 4

1 La suite (U_n) est arithmétique de raison $r = 8$. On donne $U_{100} = 650$. Déterminer U_0.

2 La suite (U_n) est arithmétique
Déterminer l'entier n sachant que :
$U_n = -28$, $U_0 = 5$ et $U_0+U_1+\cdots+U_n = -138$

3 Une suite (U_n), $n \geq 0$ arithmétique est telle que $U_2 = 3$ et $U_5 = 1$.

a Calculer sa raison et son premier terme.

b Déterminer le terme général de (U_n).

c Calculer $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{99}$

✍ Exercice 5

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = U_n + 3n + 2 \end{cases}$

1 Calculer les trois premiers termes de cette suite. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2 On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$

a Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b Exprimer V_n en fonction de n.

3 On pose $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.
Exprimer S_n en fonction de n, puis U_{n+1} en fonction de n.

✍ Exercice 6

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}U_n \end{cases}$

1 Calculer U_2, U_3 et U_4.

2 Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $U_n \geq 0$.

3 Démontrer que (U_n) est décroissante.

4 En déduire que la suite (U_n) est convergente.

5 Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \dfrac{U_n}{n}$.

a Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b Exprimer V_n puis V_n en fonction de n.

c Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

✍ Exercice 7

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases}$

1 Calculer U_1, U_2 et U_3.

2 Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $0 < U_0 < 1$.

3 Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

4 La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5 Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

a Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.*

b Donner la forme explicite de (V_n) et en déduire celle de (U_n).

c Déterminer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

6 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 8 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout entier naturel :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - n - \dfrac{4}{3} \\ v_n = u_n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1 Calculer u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2.

2 Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3 Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4 Exprimer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$ en fonction de n.

5 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 9

On consiére la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + an + b \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Soit $V_n = \frac{1}{3}U_n + n$. Déterminer a et b pour que (V_n) soit le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2 **a** Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n.

b Étudier la convergence de la suite (V_n).

3 Exprimer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$ puis $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n.

Exercice 10 **Extrait BAC L 2020**

Une commune rurale contacte une entreprise pour creuser un points de 15 mètres de profondeur dans sa circonscription. L'entreprise propose les tarifs suivants : le premier mètre creusé coûte 30000 FCFA, le suivant 34000 FCFA et ainsi de suite en augmentant de 4000 FCFA, le prix de chaque nouveau mètre creusé et U_n le prix du nième mètre creusé.

1 Calculer Calculer U_3 et U_4.

2 **a** Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire la nature de la suite (U_n) pour tout $n \geq 1$.

b Exprimer U_n en fonction de n, puis calculer U_{15}.

3 **a** Montrer que $C = 15\left(\dfrac{U_1 + U_{15}}{2}\right)$

b Calculer alors le coût total C.

Exercice 11

L'épidémie de coronavirus **Covid-19** continue de se propager dans le monde. Initialement, 200 personnes sont infectées par ce virus. Chaque semaine , 5% récupèrent de la maladie et 20 personnes sont à nouveau infectées. On suppose que le nombre de personnes atteintes par le corona au n^{ième} semaine est U_n avec n un entier naturel et $U_0 = 200$.

1 Calculer U_1 et U_2 puis en déduire que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2 Montrer que $U_{n+1} = 0,95U_n + 20$.

3 Soit $V_n = U_n - 400$.

a Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b Montrer que $U_= - 200(0,95)^n + 400$.

4 Le coût du test médical pour chaque personne est 300000 FCFA. Soit C_n le coût total payé par toutes les personnes.
Exprimer C_n en fonction de n, puis montrer que C_n est une suite croissante.

5 Chaque hôpital possède 25 salles de quarantaine. trouver le nombre maximal de patients par salle.

Devoir $N°1$ de Mathématiques 1^{er} semestre **Durée 3h**

ME ATHENA SEDAR **1S2**

Exercice 1 — 07 points

Soit le polynôme $P(x) = -9x^4 + 12x^3 + 83x^2 + 50x + 8$.

1. Calculer $P(4)$ puis trouver un polynôme Q tel que $P(x) = (x-4)Q(x)$. **1 point**
2. Montrer que -2 est une racine du polynôme Q. **0,5 point**
3. Déterminer les réels a, b et c tels que $Q(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$. **1 point**
4. En déduire une factorisation compléte de $P(x)$. **1 point**
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   - a) $P(x) = 0$ **0,75 point**
   - b) $P(x) \leq 0$ **1 point**
6. Soit la fraction rationnelle h définie par : $h(x) = \frac{-9x^4+12x^3+83x^2+50x+8}{(3x+1)(x+2)}$
7. Déterminer le domaine de définition de h puis simplifier. **1,25 point**
8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) \geq 0$. **1 point**

Exercice 2 — 07 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   - a) $\sqrt{-7x^2-5x+16} = -3x-1$ **1 point**
   - b) $\sqrt{2x^2-7x+4} = \sqrt{x^2+3x-5}$ **1 point**
   - c) $\sqrt{3x^2+2x-1} < \sqrt{2x^2+x+1}$ **1 point**
   - d) $\sqrt{-5x^2+3x+2} \geq 5x-1$ **1,5 point**

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systéme suivants

1. $\begin{cases} 4x+2y+z=5 \\ 9x+3y+z=1 \\ -x-y-z+1=0 \end{cases}$ **1,5 points**
2. $\begin{cases} x^2y+xy^2=20 \\ xy=-20 \end{cases}$ **1 point**

Exercice 3 — 06 points

Soit un triangle ABC. I , J et G sont trois points tels que : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{GI} + 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.

1. Faire une figure puis placer I et G.
2. Montrer que I et le barycentre des points A et B affectés des coefficients que l'on déterminera.
3. Montrer que J et le barycentre des points A et C affectés des coefficients que l'on déterminera.
4. Montrer que G est le barycentre du systéme $\{(A;2),(B;-1),(C;3)\}$.
5. Soit K le barycentre des points pondérés $(B,-2);(C,6)$.
   - a) Montrer que G est le milieu de $[AK]$.
   - b) Montrer que les points G, I et C sont alignés.
   - c) Montrer que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.
   - d) Déterminer le réel α tel que : $\overrightarrow{BK} = \alpha\overrightarrow{BC}$.
6. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
   - a) $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 8$
   - b) $-\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ colinéaire á $\overrightarrow{AB}$.
   - c) $\left\|-\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\|$

Inspection Académique de Dakar | Année Scolaire 2022-2023
IEF DES ALMADIES | Classe : $1S_2$
ME. ATHENA SEDAR | Durée : 03 heures

Devoir $N°2$ de Mathématiques du 1^{er} semestre

Exercice 1 — 07 points

1 Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a $f(x) = \dfrac{\sqrt{6x^2 - 13x - 5}}{2x^2 + 5x + 3}$ **1 pt**

b $f(x) = \sqrt{\dfrac{6x^2 - 13x - 5}{2x^2 + 5x + 3}}$ **1 pt**

c $f(x) = \sqrt{3 - \mid 2x + 1 \mid}$ **1 pt**

d $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} & si \quad x < 1 \\ f(x) = \sqrt{\mid x^2 - 1 \mid} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ **2 pts**

2 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + 8x + 9}$. Montrer que la droite $(D) : x = -2$ est un axe de symétrie de (C_f). **1 pt**

3 Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 5}{2x - 1}$. Montrer que $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_g). **1 pt**

Exercice 2 — 06 points

Soit la correspondance :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \sqrt{|1 - x^2|} \end{array}$$

1 Justifier que f est une application. **0,5 pt**

2 Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a Montrer que $g(x)=\sqrt{x^2 - 1}$. **0,75 pt**

b Déterminer l'image directe par g de $A = \{1; 2; 3\}$. **0,75 pt**

c Déterminer l'image réciproque par g de $B =]1; 4]$. **0,75 pt**

d Montrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J á préciser. **1 pt**

e Déterminer $g^{-1}(x)$. **0,25 pt**

3 On définit la fonction h par $h(x)=\frac{x+1}{x-3}$.

a Déterminer $D_{g\circ h}$ et $D_{h\circ g}$. **1,5 pt**

b Expliciter $g \circ h(x)$. **0,5 pt**

Exercice 3 — 07 points

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4cm$, $AC = 5cm$ et $BC = 6cm$ et I milieu de $[AB]$.

1 **a** Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$. **0,75 pt**

b En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. **1 pt**

2 Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Calculer la distance AH. **0,75 pt**

3 **a** Rappeler le théoréme de la médiane. **0,75 pt**

b En déduire la longueur de AI. **0,75 pt**

4 Soit $\Sigma = \{M \in P; MA^2 + MB^2 = 58\}$

a Montrer que pour tout point $M \in P$: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$. **0,75 pt**

b En déduire l'ensemble Σ des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 58$. **0,75 pt**

5 Soit $\Delta = \{M \in P; MA^2 - MB^2 = 16\}$

a Montrer que pour tout point $M \in P$, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$. **0,75 pt**

b En déduire l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 16$. **0,75 pt**

✍ Exercice 1

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\sqrt{x^2+3x+1}=\sqrt{x^2+x+4}$ **b)** $\sqrt{x^2+x+1}=2x-3$ **c)** $-x+\sqrt{-x^2+x+10}=-1$

d) $16(2x-3)+55\sqrt{2x-3}-36=0$ **e)** $\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-6}=6$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{-2x^2+5x+3}<2x+1$ $\sqrt{x^2-x+1}\geq 2-x$ $\sqrt{-4x^2+x+5}<2x+2$

3 Soit le polynôme P défini par : $P(x)=2x^4+ax^3+bx^2+cx+9$ avec a, b et c des réels.

a Déterminer les réels a, b et c tels : $P(-3)=P(1)=0$ et $P(-1)=-16$.

b Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de premier degré.

c Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x)\leq 0$.

d En déduire les solutions de $P\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$ puis $P(|2x+3|-2)=0$

✍ Exercice 2

Soit ABc un triangle et G le point tel que : $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1 Ecrire G comme barycentre de B et C affecté des coefficients à déterminer.

2 Soit H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Montrer que H est le barycentre du système $\{(A;-2),(B;2),(C;1)\}$.

3 Construire les points G et H ?

4 Montrer que les points A, G et H sont alignés.

5 Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que :

a $-2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

b $\|2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=3\|-2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

c $\|-2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=3$

✍ Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et que $AB=6cm$.
On note par I le milieu de $[AC]$ et G le barycentre du système $\{(A;1),(B;2)\}$.

1 Calculer BC et BI.

2 Pour tout point M du plan, on pose $f(M)=\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MC}$.

a Calculer $f(I)$ et $f(B)$.

b Montrer que $f(M)=MI^2-9$.

c En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=-5$.

3 Pour tout point M du plan, on pose $g(M)=MA^2-MC^2$.

a Calculer $g(I)$ et $g(B)$.

b Montrer que $g(M)=2\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AC}$.

c En déduire l'ensemble des points M du plan tels que : $g(M)=-24$.

4 Pour tout point M du plan, on pose $h(M)=MA^2+2MB^2$

a Calculer $h(I)$ et $h(B)$.

b Montrer que $h(M)=3MG^2+h(G)$.

c En déduire l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M)=36$.

IA Dakar — **Année scolaire $2022-2023$**

Préparation à la composition du premier semestre 2

ME ATHENA SEDAR — **1S2**

✍ Exercice 1

On considère l'équation : $(E_m) : (m+1)x^2-(m+3)x+3-m=0$, m un réel

1 Pour quelles valeurs de m (E_m) est du second degré ?

2 Etudier suivant mes valeurs de m l'existence des solutions de l'équation (E_m).

3 On suppose dans cette question que (E_m) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

- **a** Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E_m) admet deux solutions de signes contraires.
- **b** Peut-on trouver m pour que les racines vérifient : $5x_1=-3x_2$.

✍ Exercice 2

1 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du Pivot de Gauss : $\begin{cases} 2x+3y-z=24 \\ 4x-2y+3z=6 \\ 6x-y+2z=22 \end{cases}$

2 Soit f un polynôme de degré 3. Déterminer f sachant que : $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(x+1)-f(x)=-18x^2-20x-4 \end{cases}$

3 Soit P le polynôme défini par : $P(x)=x^3+x^2-mx-3$

- **a** Déterminer le réel m pour que 1 soit une racine du polynôme P.
  Dans la suite on prendra $m=-1$.
- **b** Factoriser $P(x)$ puis résoudre $P(x)=0$ et $P(x)\leq 0$.
- **c** En déduire les solutions de $P(x-3)=0$.

4 Soit la fraction rationnelle $f(x)=\dfrac{P(x)}{x^2-7x+6}$.

- **a** Déterminer le domaine de définition D_f de f.
- **b** Simplifier la fraction $f(x)$.
- **c** Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.

✍ Exercice 3

1 Dans chacun des cases suivants, déterminer le domaine de définition de f

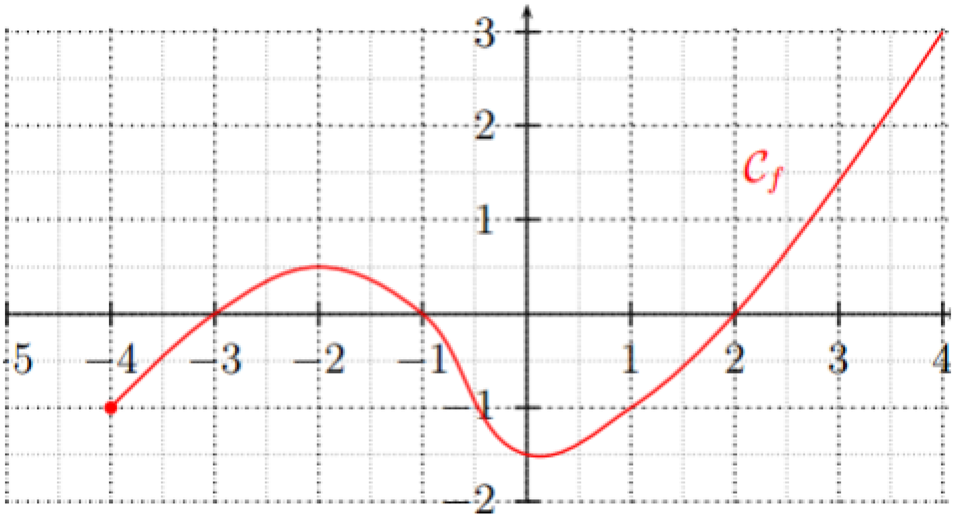
a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-6}}{|x-1|-|x-5|}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}}$ **c.** $\dfrac{x}{x-x^2}+\sqrt{x^2-2x}$ **d.** $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{4-3x}}$

e. $\sqrt{|3x^2-x+2|}$ **f.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x^2}$ **g.** $\begin{cases} f(x)=\sqrt{|x^2+x+2|} & si \quad x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x_3^2x+2}{x-3} & si \quad x>1 \end{cases}$

2 Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2-6x+3}$. Montrer que le point $I(3;0)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

✍ Exercice 4 Lecture graphique

Soit la fonction f définie de $[-4; 4]$ vers $[-1,5; 3]$ dont la courbe représentative est la suivante :



1. La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Déterminer graphiquement l'image directe par f de chacun des intervalles suivants : $]-4; 0]$ et $[-1; 2]$.
3. Déterminer graphiquement l'image réciproque par f de $[-1; 0]$.
4. Résoudre graphiquement dans $[-4; 4]$ les équations : $f(x) = -1$ et $f(x) = 0$.
5. Résoudre graphiquement dans $[-4; 4]$ l'inéquation $f(x) < 0$.
6. Dresser la tableau de signe de la fonction f.
7. Représenter sur la même figure la courbe de la fonction $g \mapsto |f(x)|$.

✍ Exercice 5

1. On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{4-x}$ et $g(x) = \sqrt{9-x^2}$.
   - a. Déterminer les domaines de définitions de f et f.
   - b. Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ puis calculer $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.
   - a. Etudier la parité de la fonction h.
   - b. Montrer que pour tout réel x, $h(x) \geq 0$.
   - c. Montrer que pour tout réel x, $h(x)$ est bornée.
   - d. Résoudre l'équation d'inconnue x : $h(x) = y$ où y est un réel positif donné.
   - e. Démontrer que la fonction h est une bijective de $]-\infty; 0[$ vers $]0; 1[$.
   - f. Déterminer sa bijection réciproque h^{-1}.
3. Soit la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{x^2}{|x|\sqrt{x^2+1}}$.
   - a. Les fonction k et h sont-elles égales ? Justifier votre réponse.
   - b. Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle h et k ont la même restriction.

◇◇◇ Maison d'Education ATHENA SEDAR ◇◇◇			A.S. : 2022/2023
Matière : Mathématiques	Niveau : $1^{ère}$ S	Date : 28/04/2023	Durée : 4 heures

Devoir n° 1 du second semestre

✍ Exercice 1 — 03,5 points

1 Quand dit-on qu'une fonction f définie sur I est continue en un réel **a** donné ? **(0,5pt)**

2 Enoncer correctement le **théorème de la bijection**. **(0,5pt)**

3 Enoncer correctement le **théorème des gendarmes**. **(0,5pt)**

4 Compléter les phrases suivantes : **(2pts)**

a Soit f une fonction tel que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ si de plus

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 \quad alors \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm\infty \quad alors \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a \neq 0\, si \quad de \quad plus \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \begin{cases} \pm\infty\, alors \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b \in \mathbb{R}\, alors \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \end{cases}$$

b Soit a un réel , si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors ....

c Soit a un réel , si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ alors ....

d Soit a un réel , si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}^*$ alors ....

✍ Exercice 2 — 08,5 points

1 Calculer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{4x+3}$ **0,5pt**

b $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - 3x$ **0,5pt**

c $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 3 + \sqrt{x^2+4x+2}$ **0,75pt**

d $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}} \dfrac{-x^2+5x+1}{3x+2}$ **0,75pt**

e $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3}$ **1pt**

f $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3\sin x}{5x^2+4}$ **1pt**

2 Etudier la continuité de f en x_0 $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x} & si \quad x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1} & si \quad x > 2 \end{cases}$ $x_0 = 2$ **1pt**

3 Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2-4x+3|}$.

a Déterminer D_f puis écrire f sans le symbole de la valeur absolue. **1pt**

b Etudier la continuité de f en 3. **0,5pt**

c Etudier la dérivabilité de f en 3 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. **1,5 pt**

✍ Problème — 8 points

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f. **0,5pt**
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f. **1pt**
3. Montrer que $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C_f). **1pt**
4. Trouver les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-1}$.
   En déduire l'existence d'une asymptote oblique (Δ) dont on précisera une équation. **1pt**
5. **a** Calculer la dérivée $f'(x)$ puis étudier son signe. **1,25pt**
   b Dresser le tableau de variations de f. **0,75**
6. Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1. **0,75pt**
7. Montrer que f est une bijection de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ vers un intervalle J à préciser. **0,75pt**
8. Déterminer les points de rencontre entre (C_f) et les axes de coordonnées. **1pt**

BonneChance

« Maintenant est le moment pour toi de prendre conscience de tes lacunes et les corriger afin de faire du progrés. Alors crois en toi, travaille copieusement et bientôt tu auras la réussite que tu mérites. »